

Limiti notevoli e calcolo integrale

Quesito_1

Studiare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x \cdot \sin x}{e^x - 1 - x}$, sapendo che la funzione $f(x)$ nel suo dominio di definizione è continua, che si annulla nel punto $x=0$ e che è derivabile due volte in un intorno dello stesso punto.

Quesito_2

Sapendo che $\int_0^1 f(x)dx = \frac{7}{12}$, stabilire se gli integrali di seguito riportati si possono calcolare, giustificando le risposte.

a) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(2x)dx$, b) $\int_1^2 f(2-x)dx$, c) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)dx$

Soluzione

Quesito_1

Ricordiamo che la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, con 0 ed x punti del dominio della funzione $f(x)$, è una primitiva di quest'ultima, precisamente è la funzione integrale di punto $x=0$. Dalle ipotesi poste sulla funzione f e dalle caratteristiche delle altre funzioni presenti nella funzione complessiva di cui si chiede di studiare il limite, si riconosce che il limite si presenta nella forma $0/0$ e che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di de l'Hôpital. Appliciamo dunque detto teorema.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x \cdot \sin x}{e^x - 1 - x} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sin x - x \cos x}{e^x - 1} = \frac{f(0) - 0 - 0}{e^0 - 1} = \frac{0}{0}$$

Il limite si presenta ancora nella forma indeterminata $0/0$. L'ipotesi sulla derivabilità della funzione $f(x)$ permette di applicare ancora la regola di de l'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sin x - x \cos x}{e^x - 1} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - \cos x - \cos x + x \sin x}{e^x} = \frac{f'(0) - 2 + 0}{e^0} = \frac{0 - 2}{1} = -2$$

Si conclude che il limite in esame esiste e vale 2.

Quesito_2

Analisi dell'integrale $\int_0^{\frac{1}{2}} f(2x)dx$

Effettuando il cambio di variabile, ponendo $2x = t \rightarrow x = \frac{1}{2}t$ e quindi $dx = \frac{1}{2}dt$; inoltre, se $x = 0$ allora $t = 0$ e con $x = \frac{1}{2}$ si ha $t = 1$. L'integrale definito assume la seguente forma:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(2x)dx = \int_0^1 f(t) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{24}$$

L'integrale proposto è dunque calcolabile.

Analisi dell'integrale $\int_1^2 f(2-x)dx$

Effettuando la sostituzione di variabile, con $2-x = t \rightarrow x = 2-t \rightarrow dx = -dt$. Per gli estremi di integrazione si ha:

$$x = 1 \rightarrow t = 2-1=1; \quad x = 2 \rightarrow t = 2-2=0.$$

L'integrale definito si trasforma come di seguito indicato.

Si osservi che nelle elaborazioni riportate si tiene conto della proprietà dell'integrale definito relativa allo scambio degli estremi di integrazione:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_1^2 f(2-x)dx = \int_1^0 f(t)(-dt) = -\int_1^0 f(t)dt = -\left(-\int_0^1 f(t)dt\right) = \int_0^1 f(t)dt = \frac{7}{12}$$

Concludiamo che l'integrale proposto è calcolabile.

Analisi dell'integrale $\int_1^2 \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)dx$

Effettuando il cambio di variabile, ponendo $\frac{1}{x} = t \rightarrow x = \frac{1}{t}$ e si ha $dx = -\frac{1}{t^2}dt$. Per gli estremi di integrazione si ha:

$$x = 1 \rightarrow t = \frac{1}{1}=1; \quad x = 2 \rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Elaboriamo l'integrale definito proposto.

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^{\frac{1}{2}} t^2 f(t) \left(-\frac{1}{t^2}dt\right) = -\int_1^{\frac{1}{2}} f(t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$$

Conclusione

L'integrale ottenuto, con le informazioni disponibili, non si può stabilire quanto vale e quindi non si può determinare neanche il valore dell'integrale c) assegnato.