

Studio di funzione e calcolo integrale

In relazione alla funzione $f(x) = xe^{-|x|}$ risolvere i quesiti seguenti

- Q₁- Studiare la funzione, precisando il dominio di derivabilità e analizzare in particolare il comportamento della funzione punto $x=0$. Definire la monotonia, gli eventuali punti di flesso e tracciare il suo diagramma.
- Q₂- Riconosciuto che per $x>0$ il diagramma ammette un punto di flesso F, scrivere l'equazione della retta tangente in detto punto e rappresentarla.
- Q₃- Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dal diagramma della curva, dall'asse delle ascisse e dalla retta tangente nel punto F di flesso.

Soluzione

Primo quesito

1) Dominio di definizione e simmetrie

La funzione esponenziale in oggetto è definita su tutto l'asse reale; dunque il dominio è $\mathbb{R}$.

Si riconosce che la funzione è dispari. ...

Pertanto il diagramma è simmetrico rispetto all'origine degli assi...

2) Segno e zeri. ...

3) Limite per $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-|x|} = \dots = 0^+ \quad \dots$$

4) Monotonia, ricerca degli eventuali punti di massimo e di minimo relativo. Derivabilità

... la funzione è derivabile nel punto $x=0$. La funzione è anche derivabile in ogni altro punto del dominio di definizione.

... $x=1$ è punto di massimo assoluto ...

5) Concavità, convessità e flessi

... il punto $x=2$ è di flesso. Il punto di flesso del diagramma è $F(2; 2e^{-2})$.

...

Esiste la derivata seconda in $x=0$?

...

Osservazione

...

Riportiamo il diagramma della funzione.

Secondo quesito

...

Terzo quesito

...

L'area della regione piana in oggetto è

$$S = S_1 + S_2 = 2e^{-2} + 1 - 3e^{-2} = 1 - e^{-2}$$

Riportiamo in Figura 2 una parte del grafico della funzione e la regione piana di area S.

...

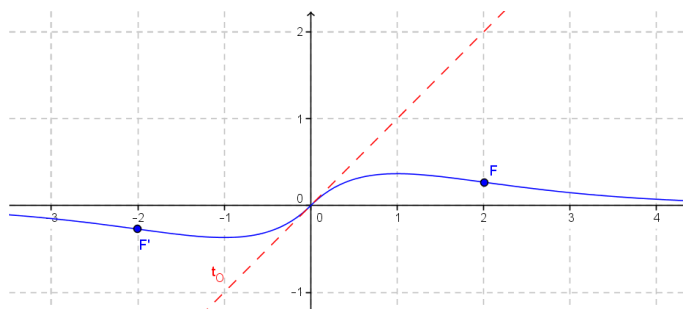


Figura 1-In figura è rappresentato il diagramma della funzione e sono evidenziati i due punti di flesso F, F', simmetrici rispetto all'origine O(0;0). Anche l'origine O è un punto di flesso per il quale è indicata la retta tangente al grafico.