

Studio di funzione e calcolo integrale

In relazione alla funzione $f(x) = xe^{-|x|}$ risolvere i quesiti seguenti

- Q₁- Studiare la funzione, precisando il dominio di derivabilità e analizzare in particolare il comportamento della funzione punto $x=0$. Definire la monotonia, gli eventuali punti di flesso e tracciare il suo diagramma.
- Q₂- Riconosciuto che per $x>0$ il diagramma ammette un punto di flesso F, scrivere l'equazione della retta tangente in detto punto e rappresentarla.
- Q₃- Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dal diagramma della curva, dall'asse delle ascisse e dalla retta tangente nel punto F di flesso.

Soluzione

Primo quesito

1) Dominio di definizione e simmetrie

La funzione esponenziale in oggetto è definita su tutto l'asse reale; dunque il dominio è $\mathbb{R}$.

Si riconosce che la funzione è dispari. Infatti, per ogni x reale risulta

$$f(-x) = -xe^{-|-x|} = -xe^{-|x|} = -f(x)$$

Pertanto il diagramma è simmetrico rispetto all'origine degli assi. In virtù della simmetria suddetta si può limitare lo studio della funzione all'intervallo $[0; +\infty[$, individuandone tutte le caratteristiche e deducendo le corrispondenti proprietà nell'intervallo $]-\infty; 0]$.

2) **Segno e zeri.** La funzione si annulla per $x=0$ ed è positiva con $x>0$. La funzione è negativa per $x<0$.

3) Limite per $x \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ La forma è indeterminata; la si può studiare riducendola alla forma ∞/∞ e applicando la regola di de l'Hôpital. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \quad \text{Si conclude che l'asse delle ascisse è asintoto}$$

orizzontale per $x \rightarrow +\infty$; per la simmetria sarà asintoto orizzontale anche per $x \rightarrow -\infty$ e si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-.$$

4) Monotonia, ricerca degli eventuali punti di massimo e di minimo relativo. Derivabilità

L'espressione della funzione ha due aspetti diversi negli intervalli $]-\infty; 0]$, $[0; +\infty[$, indicati di seguito.

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{per } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

La funzione derivata prima è $f'(x) = \begin{cases} e^x(x+1) & \text{per } x < 0 \\ e^{-x}(1-x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

I limiti laterali per $x \rightarrow 0$ della derivata prima valgono

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x}(1-x) = 1 = f'_+(0); \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x(x+1) = 1 = f'_-(0)$$

Avendo ottenuto per i due limiti lo stesso valore finito si conclude che [la funzione è derivabile nel punto \$x=0\$](#) . La funzione è anche derivabile in ogni altro punto del dominio di definizione.

Per la monotonia, relativamente ad $x > 0$, determiniamo segno e zeri della derivata prima.

$$f'(x) \geq 0, \text{ quindi } e^{-x}(1-x) \geq 0. \text{ Risulta}$$

$$f'(x) > 0, \text{ per } 0 < x < 1; \text{ dunque nell'intervallo }]0;1[\text{ la funzione è strettamente crescente;}$$

$$f'(x) < 0, \text{ per } x > 1, \text{ dunque nell'intervallo }]1;+\infty[\text{ la funzione è strettamente decrescente;}$$

$$f'(1) = 0, \text{ quindi } x=1 \text{ è un punto critico e precisamente è di massimo relativo proprio.}$$

Dalle caratteristiche fin qui determinate e dalla simmetria precisata si deduce che [x=1 è punto di massimo assoluto](#) con $f(1)=e^{-1}$ e [x=-1 è punto di minimo assoluto](#) con $f(-1)=-e^{-1}$.

5) Concavità, convessità e flessi

Tenendo conto dell'espressione della derivata prima, per determinare la derivata seconda applichiamo il teorema sulla derivata del prodotto di due funzioni.

Limitatamente ad $x > 0$ si ha:

$$f''(x) = e^{-x}(-1)(1-x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(x-2).$$

Si nota che

$f''(x) < 0$, per $0 < x < 2$, quindi nell'intervallo $]0;2[$ la funzione è concava (il suo diagramma volge la concavità verso il basso);

$f''(x) > 0$, per $x > 2$, quindi nell'intervallo $]2;+\infty[$ la concavità del grafico è rivolta verso l'alto; la funzione è convessa;

$$f''(2) = 0, \text{ il punto } x=2 \text{ è di flesso. Il punto di flesso del diagramma è } F(2;2e^{-2}).$$

Per la simmetria del diagramma possiamo affermare che in $] -\infty; -2 [$ risulta $f''(x) < 0$, ancora, in $] -2; 0 [$ si ha $f''(x) > 0$, $f''(-2) = 0$, quindi il punto $x = -2$ è di flesso. Il punto del diagramma corrispondente è $F'(-2; -2e^{-2})$.

Esiste la derivata seconda in $x=0$?

Per rispondere a questa domanda studiamo i limiti laterali della funzione derivata seconda.

$$f''(x) = \begin{cases} e^x(x+2) & \text{per } x < 0 \\ e^{-x}(x-2) & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x}(x-2) = -2 = f''_+(0);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x(x+2) = 2 = f''_-(0)$$

I limiti laterali esistono, sono finiti e diversi tra loro, quindi **non esiste la derivata seconda nel punto $x=0$** .

Osservazione

Abbiamo precisato che la funzione è derivabile anche nel punto $x=0$, quindi esiste nel punto $(0; f(0))$, cioè in $(0; 0)$, la retta tangente al diagramma della funzione ed è la retta $t_0: y=x$. Avendo appena riconosciuto che in un opportuno intorno sinistro di $x=0$ la concavità è rivolta verso l'alto⁽¹⁾ e che in un opportuno intorno destro la concavità è rivolta verso il basso⁽²⁾, possiamo affermare che il punto $(0; 0)$ è di flesso per la curva $y=f(x)$.

Riportiamo il diagramma della

funzione.

Secondo quesito

Il punto di flesso cui si fa riferimento nel testo è $F(2; 2e^{-2})$, precedentemente definito. L'equazione della retta tangente in F è

$$t_F: y - f(2) = f'(2)(x - 2), \text{ e poiché } f'(2) = -e^{-2}, \text{ l'equazione è } t_F: y = -e^{-2}x + 4e^{-2}.$$

Terzo quesito

La retta tangente in F interseca l'asse delle ascisse nel punto $A(4; 0)$. Sia H la proiezione ortogonale di F sull'asse x; quindi $H(2; 0)$.

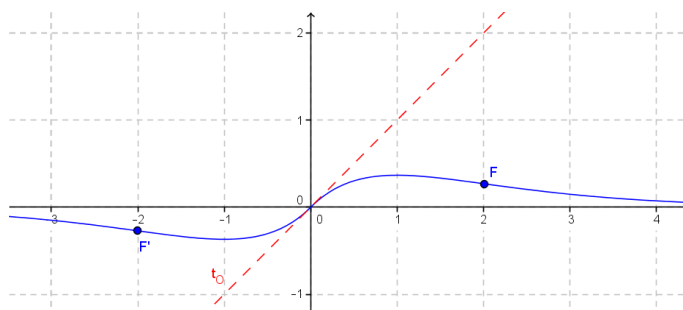


Figura 1-In figura è rappresentato il diagramma della funzione e sono evidenziati i due punti di flesso F, F', simmetrici rispetto all'origine $O(0;0)$. Anche l'origine O è un punto di flesso per il quale è indicata la retta tangente al grafico.

⁽¹⁾ Ciò si deduce dalla proprietà che in $] -2; 0 [$ si ha $f''(x) > 0$, precisata sopra

⁽²⁾ Si tenga presente che in $] 0; 2 [$ la derivata seconda è negativa

La regione finita di piano delimitata dall'asse delle ascisse, dal diagramma della curva e dalla retta tangente in F è composta dal sottografico della funzione relativo all'intervallo $[0;2]$ unito al triangolo rettangolo FHA.

L'area del triangolo rettangolo FHA vale

$$S_1 = \frac{1}{2} \overline{HA} \cdot \overline{HF} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2e^{-2} = 2e^{-2}$$

L'area S_2 del sottografico è il valore del seguente integrale definito

$$\int_0^2 xe^{-x} dx.$$

Calcoliamo l'integrale indefinito con il metodo di integrazione per parti.

$$\int xe^{-x} dx = \int x D(-e^{-x}) dx = -xe^{-x} - \int 1(-e^{-x}) dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C,$$

con C costante reale arbitraria.

Il valore dell'integrale definito è

$$S_2 = \int_0^2 xe^{-x} dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^2 = (-2e^{-2} - e^{-2}) - (0 - 1) = 1 - 3e^{-2}$$

L'area della regione piana in oggetto è

$$S = S_1 + S_2 = 2e^{-2} + 1 - 3e^{-2} = 1 - e^{-2} \approx 0,86466$$

Riportiamo in Figura 2 una parte del grafico della funzione e la regione piana di area S.

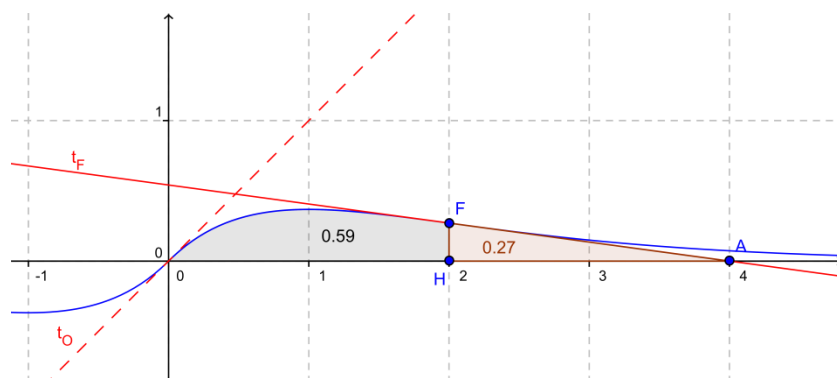


Figura 2- In figura è riportato un ingrandimento della regione piana composta dal sottografico della funzione relativo all'intervallo $[0;2]$ e dal triangolo FHA. I valori delle aree delle due regioni piane sono riportati con approssimazione a meno di 0,01