Progressione geometrica strettamente crescente
dedotta da un'altra progressione geometrica

[1]Quesito_4 (Progressione geometrica)

Sia a_n il generico termine di una progressione geometrica con ragione q>1 ed $a_1>0$. Dimostrare che la successione il cui termine generale è uguale alla differenza $d_n = a_{n+1} - a_n$ è strettamente crescente.

In particolare, con q=2 e $a_{10}=100$, calcolare d_{99}, d_{100}, d_{101} e confrontarli.

Soluzione

In una progressione geometrica il rapporto tra un termine ed il precedente, a partire dal secondo termine, è costante ed il valore di detto rapporto rappresenta la ragione q della progressione.

Ricordiamo che l'n-simo termine della progressione si può ottenere dal primo termine tramite la relazione $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Ciò premesso, nella successione delle differenze

$d_1, d_2, d_3 ..., d_n, ...$

consideriamo due termini consecutivi, d_n, d_{n+1} e proviamo che sussiste la disuguaglianza $d_n < d_{n+1}$.

Osserviamo che

$$d_n = a_n - a_{n-1} = a_1 q^{n-1} - a_1 q^{n-2} = a_1 q^{n-2}(q-1)$$

$$d_{n+1} = a_{n+1} - a_n = a_1 q^n - a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1}(q-1)$$

Avendo supposto $a_1>0$ e $q>1$, risulta $d_n = a_{n+1} - a_n > 0$. Considerando il rapporto d_{n+1}/ d_n otteniamo:

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{a_1 q^{n-1}(q-1)}{a_1 q^{n-2}(q-1)} = q \to d_{n+1} = q d_n > d_n \qquad \text{C.V.D.}$$

Osservazione

La successione di termine generale d_n, nelle ipotesi poste, è ancora geometrica e la sua ragione è q.

Caso particolare: q=2 e $a_{10}=100$

$$d_{99} = a_{100} - a_{99} = a_{10} \cdot q^{90} - a_{10} \cdot q^{89} = a_{10} \cdot q^{89}(q-1) = 100 \cdot 2^{99};$$

$$d_{100} = a_{101} - a_{100} = q \cdot d_{99} = 2 \cdot 100 \cdot 2^{99} = 100 \cdot 2^{100} = 2d_{99};$$

$$d_{101} = a_{102} - a_{101} = q \cdot d_{100} = 2 \cdot 100 \cdot 2^{100} = 100 \cdot 2^{101} = 2d_{100} = 4d_{99}$$

[1] Quesito assegnato nella prova di fine percorso nella classi quinte sperimentali PNI del Liceo Scientifico "G. Stampacchia" il 28-05-2012