Integrali definiti (calcolo di aree e di volumi)

Alle prese con un'aiuola logaritmica

Quesito_1

Considerata la funzione $f(x) = \log^2 x$, dimostrare che ammette un punto di minimo assoluto in $x=1$ ed un punto di flesso per $x=e$.

Calcolare l'area della regione finita di piano S delimitata dal diagramma della funzione e dalla retta r di equazione y=*f*(*e*).

Quesito_2 (la capacità di un'aiuola)

Si vuole costruire un'aiuola a partire dalla diagramma della funzione logaritmica $f(x) = \log^2 x$. La regione piana considerata è quella finita delimitata dalla retta y=1 e dal diagramma della funzione $f(x) = \log^2 x$ (vedere la Figura 1). La profondità p(*x*) dell'aiuola dipende dalla distanza *x* dall'asse y secondo la legge

$p(x) = \frac{1}{2}\left(e - \frac{x}{2}\right)$, con $e^{-1} \le x \le e$.

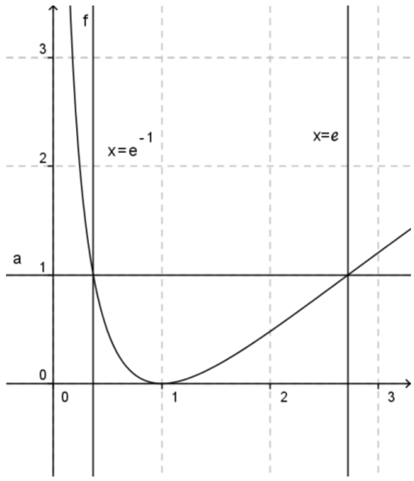


Figura 1

Con *x* espresso in metri, calcolare la capacità dell'aiuola, per stabilire quanti metri cubi di terreno servono per colmarla.

Soluzione

Quesito_1

La funzione è definita nell'intervallo $]0;+\infty[$, si annulla nel punto x=1 e assume per ogni altro punto del dominio valore positivo, quindi nel punto x=1 assume il valore minimo assoluto.

Monotonia

$$f'(x) = 2\log x \cdot \frac{1}{x} = 2\log x$$

$f'(x) = 0$ per x=1; $f'(x) > 0$, per x>1. La funzione è strettamente crescente in $]1;+\infty[$ e strettamente decrescente in $]0;1[$. Come già precisato x=0 è di minimo assoluto ed è l'unico punto di minimo.

Derivata seconda

$$f''(x) = 2\left(\frac{1}{x^2} - \log x \cdot \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}(1 - \log x)$$

$f''(x) = 0$ per $x = e$; $f''(x) > 0$ per $0 < x < e$; il punto *x=e* è di flesso discendente; $f(e) = 1$.

Area della regione piana

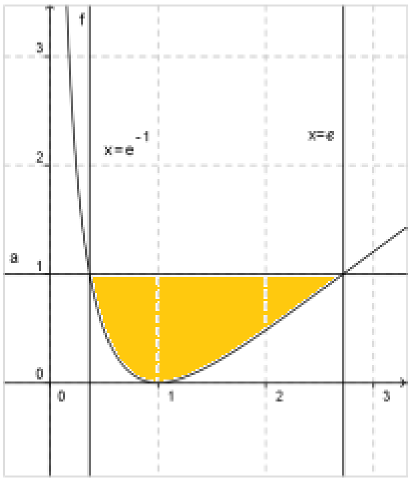
La retta $r: y = f(e) = 1$ interseca il diagramma della curva in due punti le cui ascisse sono le soluzioni dell'equazione

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \log^2 x = 1 \rightarrow \log x = \pm 1 \rightarrow x_1 = e^{-1}, x_2 = e.$$

Uno dei due punti è il punto di flesso F(*e*;1); il secondo punto è $A\left(e^{-1};1\right)$.

Il valore dell'area della regione piana in oggetto è:

$$S=\int_{e^{-1}}^{e}\left(1-\log^2 x\right)dx$$



Calcoliamo prima l'integrale indefinito.

$$\int\left(1-\log^2 x\right)dx=x-\int\log^2 x dx=$$

$$x-\left[x\log^2 x-\int x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx\right]=\ x-x\log^2 x+2\int\log x dx=$$

$$x-x\log^2 x+\ 2\left[x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx\right]=\ x-x\log^2 x+$$

$$2\left(x\log x-x\right)+C=\ x\left(-1-\log^2 x+2\log x\right)+C$$

Valore dell'integrale definito

$$S=\int_{e^{-1}}^{e}\left(1-\log^2 x\right)dx=\left[x\left(-1-\log^2 x+2\log x\right)\right]_{e^{-1}}^{e}=$$

$$e\left(-1-1+2\right)-\ e^{-1}\left(-1-1-2\right)=4e^{-1}$$

* * * * * * *

Quesito_2 (la capacità di un'aiuola)

La capacità dell'aiuola, espressa in metri cubi, è il valore del seguente integrale definito:

$$\int_{e^{-1}}^{e}(1-f(x))\,p(x)dx=\ \int_{e^{-1}}^{e}\left(1-\log^2 x\right)\frac{1}{2}\left(e-\frac{x}{2}\right)dx=\ \frac{1}{2}e\int_{e^{-1}}^{e}\left(1-\log^2 x\right)dx-\ \frac{1}{4}\int_{e^{-1}}^{e}x\left(1-\log^2 x\right)dx$$

In precedenza abbiamo trovato che

$$\int_{e^{-1}}^{e}\left(1-\log^2 x\right)dx=4e^{-1}\rightarrow\ \frac{1}{2}e\int_{e^{-1}}^{e}\left(1-\log^2 x\right)dx=\ \frac{1}{2}e\cdot 4e^{-1}=2\,.\ (*)$$

Rimane da calcolare il secondo integrale definito

$$-\frac{1}{4}\int_{e^{-1}}^{e}x\left(1-\log^2 x\right)dx$$

Calcoliamo prima l'integrale indefinito.

Figura 2-La forma dell'aiuola in vista 3D

$$\int x\left(1-\log^2 x\right)dx=\ \int\left(x-x\log^2 x\right)dx=$$

$$\frac{x^2}{2}-\left[\frac{x^2}{2}\log^2 x-\int\left(\frac{x^2}{2}\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\right)dx\right]=\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\log^2 x+\int x\log x dx=$$

$$\frac{x^2}{2}\left(1-\log^2 x\right)+\left[\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right]=\ \frac{x^2}{2}\left(1-\log^2 x\right)+\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C=$$

$$\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\log^2 x+\log x\right)+C$$

Dunque

$$-\frac{1}{4}\int_{e^{-1}}^{e}x\left(1-\log^2 x\right)dx=\ -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\log^2 x+\log x\right)\right]_{e^{-1}}^{e}\ =\ -\frac{1}{16}\left(e^2+3e^{-2}\right)\ (**)$$

Sommando i due termini (*) e (**) otteniamo la capacità dell'aiuola.

$$\int_{e^{-1}}^{e}\left(1-f(x)\right)p(x)dx = 2-\frac{1}{16}\left(e^{2}+3e^{-2}\right) \simeq 1,5297$$

La capacità dell'aiuola è di circa 1,53m^3.