

Verso l'Esame di Stato nel Liceo Scientifico

Problema

Considerata la parabola γ di equazione $y=4x-x^2$, determinare il trapezio isoscele di area massima inscritto nel segmento parabolico di γ appartenente al primo quadrante.

Soluzione

La parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, come vertice $V(2;4)$ e passa per l'origine O degli assi cartesiani. Il secondo punto in cui taglia l'asse delle ascisse è $A(4;0)$.

Per risolvere il problema occorre condurre una retta s parallela all'asse delle ascisse, che intersechi l'arco di parabola contenuto nel primo quadrante nei punti P e Q e determinare per quale posizione di s il quadrilatero convesso di vertici O, A, P, Q , che è un trapezio isoscele per la simmetria di cui gode la parabola, ha area massima.

In riferimento alla figura a lato risulta:

- $Q(x; 4x - x^2)$, con $0 \leq x \leq 2$.
- Il punto P è simmetrico di Q rispetto all'asse di simmetria $x=2$ della parabola e dunque le sue coordinate sono
 $x_P = 4 - x_Q = 4 - x$; $y_P = y_Q = 4x - x^2$
- La misura della base maggiore OA del trapezio è quattro e la misura della base minore QP è
 $\overline{QP} = x_P - x_Q = 4 - 2x$.
- L'altezza del trapezio è uguale al valore delle ordinate dei punti P, Q : $h = 4x - x^2$.

Ciò premesso, l'area del trapezio $OAPQ$ è

$$S(x) = \frac{(\overline{OA} + \overline{QP}) \cdot h}{2} = x(4 - x)^2$$

Si deve determinare il valore del massimo assoluto della funzione ottenuta con x variabile nell'intervallo $[0;2]$. Poiché la funzione in esame è un polinomio, che è continua, nonché derivabile, per il teorema di Weierstrass siamo certi che ammetterà il valore massimo.

La derivata prima è

$$S'(x) = (x-4)(3x-4)$$

Si riconosce immediatamente che per $x=4/3$ si ha il massimo relativo, nonché assoluto, per la funzione. Il valore del massimo è

$$Max = S\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{9}.$$

I punti P e Q hanno coordinate: $P\left(\frac{8}{3}; \frac{32}{9}\right), Q\left(\frac{4}{3}; \frac{32}{9}\right)$

