

Studio veloce di alcune funzioni irrazionali

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Dominio: La funzione è definita in $A =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

Simmetrie: La funzione è pari perché $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in A$.

Segno è zeri: La funzione si annulla nei punti $x_1 = -1, x_2 = 1$; è positiva negli altri punti del dominio.

Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Asintoti

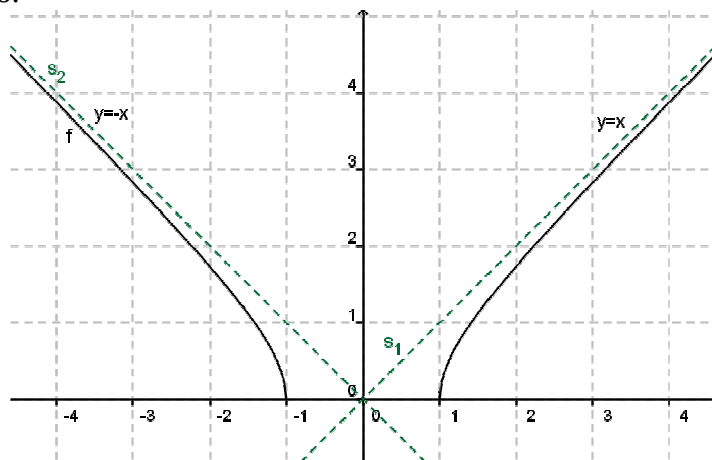
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x = 0 \rightarrow$$

si deduce che la retta $y=x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ e la retta $y=-x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$;

Monotonia: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

La funzione:

- è derivabile in ogni punto del dominio di definizione ad eccezione dei punti $x_1 = -1, x_2 = 1$;
- è strettamente decrescente nell'intervallo $]-\infty; -1[$ e strettamente crescente nell'intervallo $[1; +\infty[$;
- non ammette massimo: $\text{Sup}(f) = +\infty$; i punti $x_1 = -1, x_2 = 1$ in cui si annulla sono anche di minimo assoluto.



b) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Dominio: La funzione è definita in $A =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

Simmetrie: Il diagramma della funzione è simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = \frac{1}{2}$.

Ricordiamo che per dimostrare che la funzione $y=f(x)$ ha diagramma simmetrico rispetto alla retta $x=h$ si deve provare che per ogni x del dominio è soddisfatta l'uguaglianza $f(2h-x)=f(x)$; nel nostro caso che $f(1-x)=f(x)$. Ebbene

$$f(1-x) = \sqrt{(1-x)^2 - (1-x)} = \dots = \sqrt{x^2 - x} = f(x)$$

Segno è zeri: La funzione si annulla nei punti $x_1 = 0, x_2 = 1$; è positiva negli altri punti del dominio.

Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Asintoti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} - x = -\frac{1}{2} \rightarrow$$

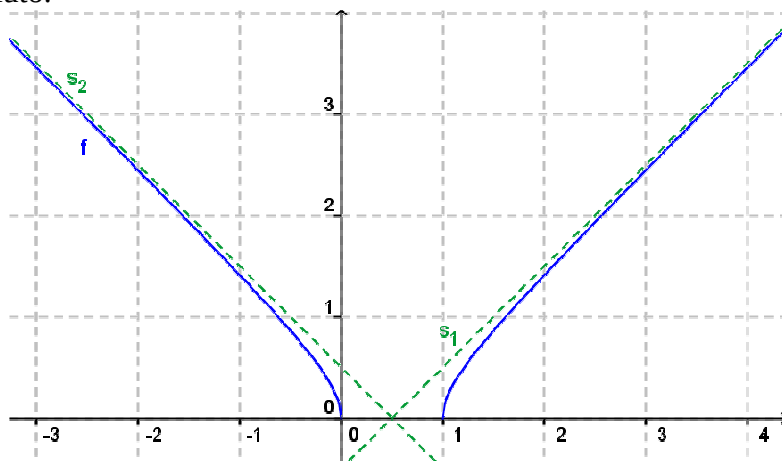
si deduce che la retta $y = x - \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$; analogamente si prova che la retta

$y = -x + \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$;

Monotonia: $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$

La funzione:

- è derivabile in ogni punto del dominio di definizione, con esclusione dei punti $x_1 = 0, x_2 = 1$;
- è strettamente decrescente nell'intervallo $]-\infty; 0[$ e strettamente crescente nell'intervallo $]1; +\infty[$;
- non ammette massimo: $\text{Sup}(f) = +\infty$; i punti $x_1 = 0, x_2 = 1$ in cui si annulla sono anche di minimo assoluto.



c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

Dominio: La funzione è definita su tutto l'asse reale: $A = \mathbb{R}$

Simmetrie: Il diagramma della funzione non presenta simmetrie.

Segno è zeri: La funzione non ha zeri ed è positiva in ogni punto del dominio.

Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Asintoti

Avendo ottenuto che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ si conclude che l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$.

Studiamo ora l'andamento per $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}{x} = -2 = m$$

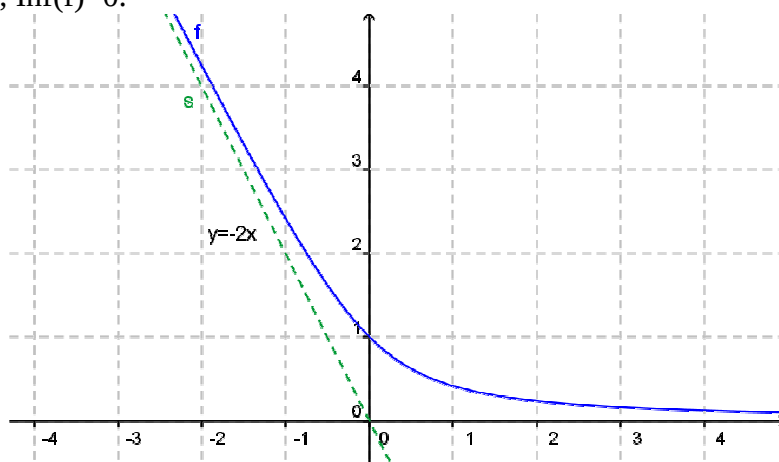
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 0$$

Si conclude che la retta di equazione $y = -2x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$.

Monotonia: $f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Si riconosce facilmente che la funzione:

- è derivabile in ogni punto del dominio di definizione e che $f'(x) < 0$;
- è strettamente decrescente in tutto il dominio, non ammette massimo, né minimo:
 $\text{Sup}(f) = +\infty$, $\text{Inf}(f) = 0$.



d) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

Dominio: La funzione è definita nell'intervallo: $A = [0; 1[$

Simmetrie: Il diagramma della funzione non presenta simmetrie.

Segno è zeri: La funzione si annulla per $x=0$ ed è positiva in ogni altro punto del dominio.

Limiti: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

Asintoti

Avendo ottenuto che $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ si conclude che la retta $x=1$ è asintoto verticale a sinistra.

Monotonia: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$

Si riconosce facilmente che la derivata prima non si annulla in alcun punto (quindi la funzione non presenta punti stazionari) e che è positiva in ogni punto del dominio diverso da $x=0$, dunque la funzione è strettamente crescente in tutto il dominio.

Comportamento del diagramma in un intorno destro di $x=0$.

Osserviamo in particolare che dall'essere $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$ si deduce che il diagramma della funzione parte dall'origine degli assi tangenzialmente all'asse delle ordinate.

Per quanto concerne la derivabilità, la funzione è derivabile in ogni punto del dominio con esclusione di $x=0$.

Il punto $x=0$ è di **minimo assoluto**. La funzione non ammette massimo e risulta $\text{Sup}(f) = +\infty$.

