Studio di funzione e calcolo integrale

1) Considerata l'equazione $y=\dfrac{ax^3+bx+c}{x+1}$, determinare i valori dei parametri *a*, *b*, *c* in modo che la corrispondente funzione abbia in A(1;-1) un punto stazionario e il suo diagramma passi per il punto B(2;0).

2) Studiare la funzione ottenuta e rappresentare il suo diagramma. Riconoscere che la funzione ha un solo punto di flesso e scrivere l'equazione della retta tangente nello stesso punto.
3) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal diagramma della funzione e dall'asse delle ascisse.

Soluzione

1) Ricerca dei valori dei parametri

Le condizioni cui deve soddisfare la funzione richiedono che la curva passi dai punti A e B assegnati e che la derivata prima della funzione si annulli nel punto *x*=1. Le tre condizioni algebriche sono:

$$y(1)=-1\rightarrow a+b+c=-2$$

$$y(2)=0\rightarrow 8a+2b+c=0$$

$$y'(1)=0\rightarrow 2(3a+b)-(a+b+c)=0$$

Risolvendo il sistema formato dalle tre equazioni ottenute si ricava $a=\dfrac{3}{4}$, $b=-\dfrac{13}{4}$, $c=\dfrac{1}{2}$

2) **Studio della funzione**: $y=\dfrac{3x^3-13x+2}{4(x+1)}$

Dominio: A=R-{-1}

Segno e zeri

Ricordato che la funzione si annulla per *x*=2, eseguendo la divisione $(3x^3-13x+2):(x-2)=3x^2+6x-1$ e risolvendo l'equazione $3x^2+6x-1=0$ si trovano altri due zeri che sono $x=\dfrac{-3\pm2\sqrt{3}}{3}$. Dunque gli zeri della funzione sono i punti: $x_1=\dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3}$, $x_2=\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}$, $x_3=2$.

La funzione è negativa in $\left]\frac{-3-2\sqrt{3}}{3};-1\right[\cup\left]\frac{2\sqrt{3}-3}{3};2\right[$ ed è positiva negli altri punti del dominio.

Limiti e asintoti

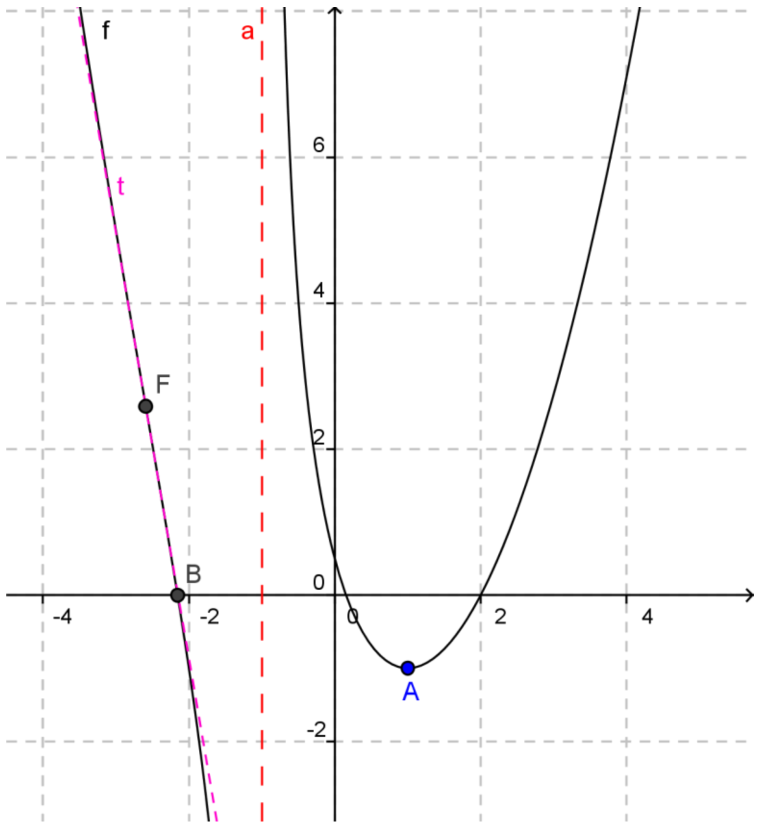
La retta x+1=0 è asintoto verticale a sinistra e a destra e risulta

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{3x^3-13x+2}{4\ x+1}=\frac{12}{0^-}=-\infty;\ \lim_{x\to-1^+}\frac{3x^3-13x+2}{4\ x+1}=\frac{12}{0^+}=+\infty$$

Il diagramma della funzione non ammette alcun asintoto per $x\to+\infty$ e $x\to-\infty$ perché è un infinito del secondo ordine: $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-13x+2}{4\ x+1}=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-13x+2}{4\ x+1}=+\infty$

Dai valori ottenuti per i limiti studiati si conclude che Sup(f)=+∞ e Inf(f)=-∞.

Monotonia, massimi e minimi relativi.



$$f'\ x\ =\frac{3\ 2x^3+3x^2-5}{4\ x+1\ ^2}=\frac{3\ x-1\ \ 2x^2+5x+5}{4\ x+1\ ^2}$$

$f'\ x\ >0$ per x>1 ed $f'\ x\ <0$ per x<1 e x≠-1. Il punto x=1 è di minimo relativo proprio: $f\ 1\ =-1$.

La funzione non ammette punti di massimo relativo.

Concavità e flessi

$$f''\ x\ =\frac{3\ x^3+3x^2+3x+5}{2\ x+1\ ^3}$$

Osserviamo che l'equazione $x^3+3x^2+3x+5=0$, essendo di grado dispari, ammette almeno uno zero $x=\alpha$. Inoltre, con $\varphi(x)=x^3+3x^2+3x+5$, avendosi $\varphi(-3)=-4<0$ e $\varphi(-2)=+3>0$, per il teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue, si deduce che la funzione $\varphi(x)$ si deve annullare in almeno un punto internamente all'intervallo]-3;-2[. D'altra parte, la derivata prima $\varphi'(x)=3x^2+6x+3=3\left(x+1\right)^2$

è non negativa e si annulla solo per x=-1 e ciò implica che la funzione φ su tutto l'asse reale è strettamente crescente. Questa proprietà di monotonia assicura che il solo punto in cui si annulla la funzione $\varphi(x)$ su tutto l'asse reale è proprio il punto $x=\alpha$ suddetto, che è interno all'intervallo]-3;-2[e rappresenta anche l'unico punto in cui si annulla la funzione derivata seconda $f''(x)$. Eseguendo la ricerca per approssimazioni successive si riconosce che risulta $x=\alpha\simeq-2,59$.

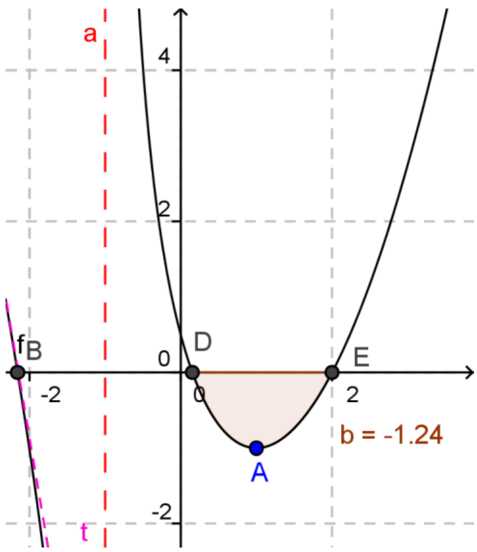
Dallo studio del segno della derivata seconda $f''(x)$ si riconosce altresì che il punto $x=\alpha\simeq-2,59$ è di flesso discendente perché la funzione è convessa per x<-2,59 e per x>-1, e concava per -2,59<x<-1.

Equazione della retta tangente in flessionale: 5,82x+y+12,49=0

3) Calcolo dell'area della regione piana

La regione piana di cui si deve calcolare l'area si trova nel semipiano delle ordinate negative; infatti, l'intervallo corrispondente per la variabile è $\left]\frac{2\sqrt{3}-3}{3};2\right[$, dove la funzione è negativa. Il valore dell'area è dato dal seguente integrale definito

$$-\int_{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}^{2}\frac{3x^3-13x+2}{4\left(x+1\right)}dx$$



Per il calcolo di detto integrale si deve preliminarmente calcolare l'integrale indefinito corrispondente. Si ha:

$$\int\frac{3x^3-13x+2}{4\left(x+1\right)}dx=\frac{1}{4}\int\left(3x^2-3x-10+\frac{12}{x+1}\right)dx=$$
$$\frac{1}{4}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2-10x+12\log\left|x+1\right|\right)+C$$

Valore dell'integrale definito

$$-\int_{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}^{2}\frac{3x^3-13x+2}{4\left(x+1\right)}dx=$$
$$-\frac{1}{4}\left[x^3-\frac{3}{2}x^2-10x+12\log\left|x+1\right|\right]_{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}^{2}\simeq1,24$$