

Studio di una funzione razionale fratta e calcolo di un'area

Q1- Considerata la funzione $f(x) = \frac{ax}{(bx+1)^2}$, con $b \neq 0$, determinare i valori delle costanti a, b per i

quali la funzione abbia in $x=2$ un punto stazionario ed il suo diagramma passi dal punto $P(-1;4)$.

Q2- Studiare la funzione ottenuta e rappresentare il suo diagramma nel riferimento xOy .

Q3- Riconosciuto che $x=2$ è punto di minimo per la funzione, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla retta passante per i punti P ed $A(2;f(2))$.

Soluzione

Q1- Imponiamo le condizioni:

a) di passaggio della curva della funzione $y=f(x)$ dal punto $P(-1;4)$

$$f(-1) = 4 \rightarrow \frac{-a}{(-b+1)^2} = 4$$

Facciamo a questo punto notare espressamente che deve essere $a \neq 0$.

b) Per definizione una funzione ha in x_0 un punto stazionario se nello stesso punto è derivabile e la derivata prima vale zero. Per imporre la condizione richiesta si deve determinare la funzione derivata prima ed imporre che essa si annulli per $x=2$.

$$f'(x) = \frac{a(bx+1)^2 - ax \cdot 2(bx+1) \cdot b}{(bx+1)^4} = \frac{a(bx+1)[(bx+1) - 2bx]}{(bx+1)^4} = \frac{a(bx+1)(1-bx)}{(bx+1)^4} =$$

$$\frac{a(1-bx)}{(bx+1)^3}; \quad f'(2) = 0 \rightarrow \frac{a(1-2b)}{(2b+1)^3} = 0$$

Poiché abbiamo precisato che deve risultare $a \neq 0$, la condizione sulla derivata prima implica che si abbia anche $1-2b = 0$. Si deve risolvere il sistema seguente

$$\begin{cases} \frac{-a}{(-b+1)^2} = 4 \\ 1-2b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -4\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2 = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{La funzione da studiare è } f(x) = \frac{-x}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2} = \frac{-4x}{(x+2)^2}$$

Q2- Studio della funzione

1) Dominio: $A = \mathbb{R} - \{-2\}$

2) Segno e zeri

La funzione si annulla solo per $x=0$, è positiva per $x < 0$ e $x \neq -2$, è negativa per $x > 0$.

3) Limiti nei punti di frontiera ed eventuali asintoti

La frontiera del dominio è $Fr(A) = \{-\infty; -2; +\infty\}$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2} = \frac{-4}{-\infty} = 0^+;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2} = \frac{-4}{+\infty} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-4x}{(x+2)^2} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

Conclusioni- L'asse delle ascisse è asintoto orizzontale sia per $x \rightarrow -\infty$, sia per $x \rightarrow +\infty$; la retta di equazione $x+2=0$ è asintoto verticale sia a sinistra che a destra.

L'estremo superiore della funzione è $\text{Sup}(f) = +\infty$. Per quanto concerne **l'estremo**

inferiore occorre studiare la monotonia per stabilire se eventualmente la funzione ammette punti di minimo assoluto.

4) Monotonia, crescita, decrescenza, massimi e minimi relativi e assoluti.

$$f'(x) = \frac{a(1-bx)}{(bx+1)^3} \rightarrow f'(x) = \frac{-\left(1 - \frac{1}{2}x\right)}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3} = \frac{4(x-2)}{(x+2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \text{ solo per } x=2;$$

$f'(x) > 0$ per $(x < -2) \vee (x > 2)$; in ciascuno degli intervalli $]-\infty; -2[$, $]2; +\infty[$, la funzione è strettamente crescente;

$f'(x) < 0$ per $-2 < x < 2$; nell'intervallo $]-2; 2[$ la funzione è strettamente decrescente.

Il punto $x=2$ è di minimo relativo proprio; tenendo conto delle informazioni ricavate prima si deduce che il punto è addirittura **di minimo assoluto** e risulta $\min = f(2) = -\frac{1}{2}$.

5) Concavità e flessi

$$f''(x) = 4 \cdot \frac{1 \cdot (x+2)^3 - (x-2) \cdot 3 \cdot (x+2)^2}{(x+2)^6} = 4 \cdot \frac{(x+2)^2 \cdot [(x+2) - 3(x-2)]}{(x+2)^6} = \frac{8(4-x)}{(x+2)^4}$$

$f''(x) > 0$ per $x < 4$ e $x \neq -2$; dunque in ciascuno degli intervalli $]-\infty; -2[$, $]-2; 4[$ la concavità del grafico è rivolta verso l'alto (la funzione è convessa);

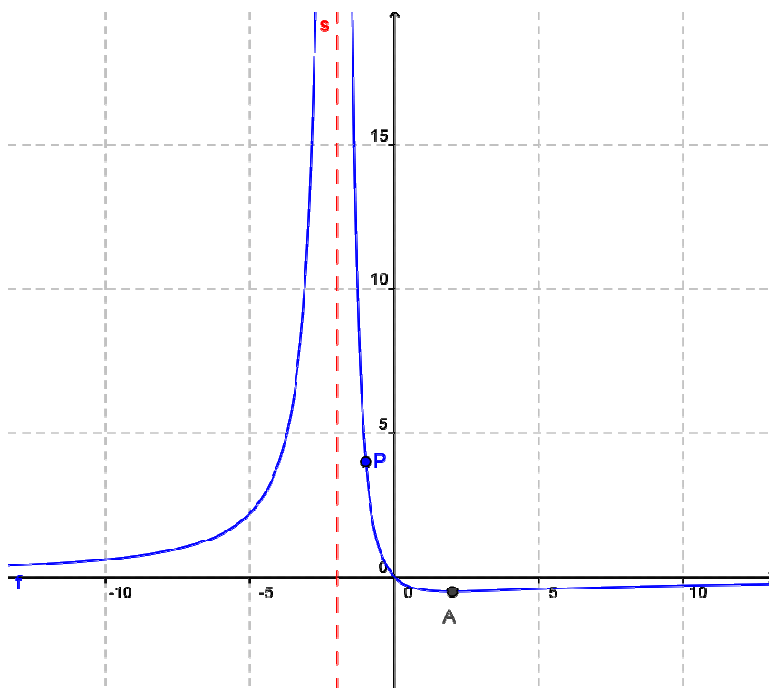
$f''(x) < 0$ per $x > 4$; dunque nell'intervallo $]4; +\infty[$ la concavità è rivolta verso il basso (la funzione è concava);



$f''(x) = 0$ solo per $x=4$. Il punto $x=4$ è di flesso e la tangente al diagramma della funzione in $F(4;f(4))$ è obliqua. Il

flesso è discendente perché in un intorno completo del punto $x=4$ la concavità è rivolta verso l'alto a sinistra del punto e verso il basso a destra del punto.

Il diagramma della funzione è rappresentato in **Figura 1**



Q3- Calcolo dell'area (applicazione del calcolo integrale)

La retta AP ha equazione

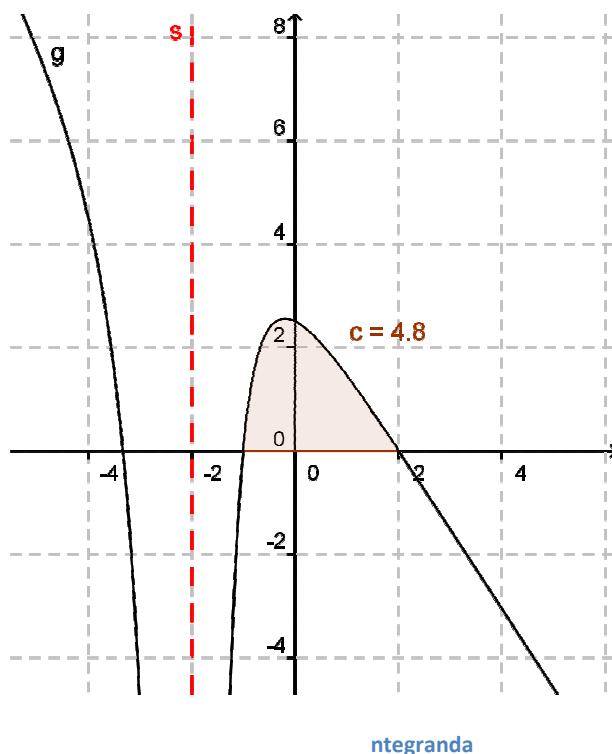
$$[A;P]: y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

Il valore dell'area della regione finita di piano delimitata dal diagramma della funzione e dalla retta $[A;P]$ è quello del seguente integrale definito

$$\int_{x_p}^{x_A} \left(-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} - f(x) \right) dx.$$

Per il calcolo dell'integrale definito è necessario decomporre opportunamente la funzione integranda. Riportiamo di seguito i passaggi algebrici senza ulteriori precisazioni.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \left(-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{4x}{(x+2)^2} \right) dx = \\ \int_{-1}^2 \left(-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \right) dx + \int_{-1}^2 \frac{4x}{(x+2)^2} dx = \end{aligned}$$



$$\left[-\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x\right]_{-1}^2 + 2 \int_{-1}^2 \frac{2x+4-4}{x^2+4x+4} dx = \left[(-3+5) - \left(-\frac{3}{4} - \frac{5}{2}\right)\right] + 2 \left[\log(x^2+4x+4)\right]_{-1}^2 +$$
$$-8 \int_{-1}^2 (x+2)^{-2} dx = \frac{21}{4} + 8 \log 2 + \left[\frac{8}{x+2}\right]_{-1}^2 = \frac{21}{4} + 8 \log 2 - 6 = 8 \log 2 - \frac{3}{4} \simeq 4,795$$

In **Figura 2** abbiamo riportato la rappresentazione della funzione integranda

$g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{4x}{(x+2)^2}$ ed è visualizzato il risultato del calcolo dell'area della regione

piana che il grafico di $g(x)$ delimita con l'asse delle ascisse relativamente all'intervallo $[-1; 2]$. Il valore fornito dell'area è approssimato a meno di 0,1.

