

Lato del decagono regolare e sezione aurea di un segmento

Problema⁽¹⁾

Q1- Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è la sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\sin 18^\circ$, $\sin 36^\circ$.

Soluzione

Ricordiamo che la sezione aurea di un segmento, per definizione, è la parte del segmento che risulta media proporzionale tra l'intero segmento e la parte dell' stesso che rimane sottraendo al segmento la sua parte aurea.

Nella figura a lato è indicato il segmento AB ed è indicato il punto P interno ad esso. Posto $\overline{AB} = l$, $\overline{AP} = x$, affinché il segmento AP sia la parte aurea del segmento AB la misura x (positiva) deve verificare la seguente proporzione

$$l : x = x : (l - x) \Rightarrow x^2 + lx - l^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{l \cdot (\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

Osserviamo che $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$; 0,618, quindi la sezione aurea di un

segmento rappresenta quasi il 62% del segmento.

Il quesito chiede di dimostrare che il lato del decagono regolare è uguale alla sezione aurea del raggio della circonferenza in cui è inscritto. Per dimostrare l'affermazione si deve considerare un triangolo isoscele avente l'angolo al vertice di 36° (e conseguentemente i due angoli alla base di misura 72°) e far vedere che la base del triangolo rappresenta la sezione aurea del lato.

In riferimento al triangolo isoscele rappresentato a lato con le caratteristiche indicate, si osservi che tracciando la bisettrice AD dell'angolo alla base nel vertice A , il triangolo ABD è isoscele e simile al triangolo ABC ; anche il triangolo ADC è isoscele con $AD=CD$. Sussiste la seguente proporzione

$BC:AB=AD:BD$

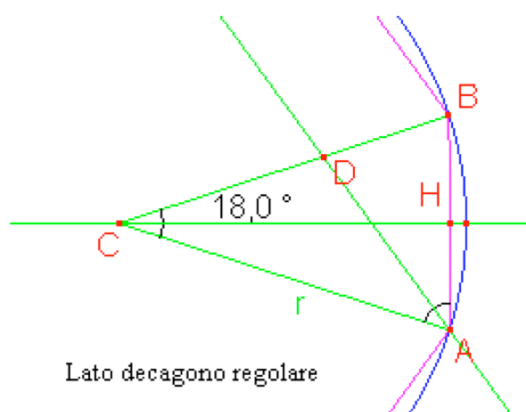
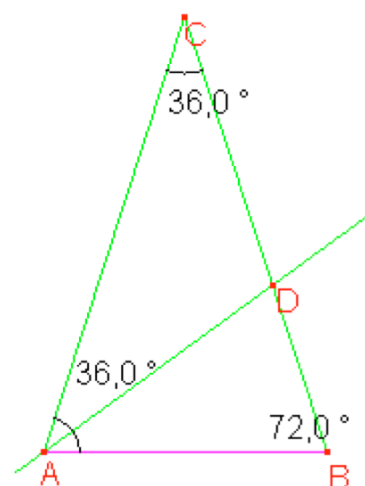
dalla quale emerge che si può anche scrivere

$BC:CD=CD:BD$

Ma evidentemente $BD=BC-CD$ e quindi CD è la sezione aurea di BC ; poiché $CD=AB$ la tesi è acquisita.

A questo punto si può tornare all'esagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio r .

Notiamo che unendo due vertici consecutivi con il centro della circonferenza si ottiene un triangolo isoscele con l'angolo nel centro C della circonferenza che misura 36° (un decimo dell'angolo giro) e dunque per la dimostrazione precedente la misura del lato del decagono (base del triangolo) rappresenta la sezione aurea del raggio. Indicando con l_{10} la misura del lato del decagono regolare, e con r la misura del raggio possiamo porre



¹ Quesito n.1 assegnato nell'Esame di Stato del Liceo Scientifico, Indirizzo PNI, nella sessione ordinaria del 23-06-2005

$$l_{10} = \frac{r \cdot (\sqrt{5} - 1)}{2}$$

D'altra parte, considerando la bisettrice CH dell'angolo al vertice C, l'angolo BCH misura 18° e dal triangolo rettangolo CHB possiamo scrivere

$$\text{sen}(BCH) = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \text{sen}(18^\circ) = \frac{l_{10}/2}{r} = \frac{r \cdot (\sqrt{5} - 1)}{4 \cdot r} = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{4}$$

Calcolo di $\text{sen}(36^\circ)$

Ricordiamo che dalle formule di duplicazione si ha

$$\text{sen}(36^\circ) = 2\text{sen}(18^\circ) \cdot \cos(18^\circ)$$

e che possiamo calcolare $\cos(18^\circ)$ dalla relazione

$$\cos(18^\circ) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(18^\circ)} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

Lasciamo al lettore le ultime elaborazioni algebriche. Il risultato richiesto è

$$\text{sen}(36^\circ) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

Commento

Si tratta di un problema classico. L'argomento della sezione aurea di un segmento è trattata nella geometria piana del secondo Liceo Scientifico. Assegnando questo quesito l'autore ha voluto verificare se il candidato conoscesse il significato di sezione aurea di un segmento, se conoscesse la relazione tra la misura del lato del decagono regolare e quella del raggio della circonferenza innocui è inscritto ed infine se il candidato conoscesse adeguatamente alcune formule goniometriche.