

Verso l'Esame di Stato nel Liceo Scientifico

Problema

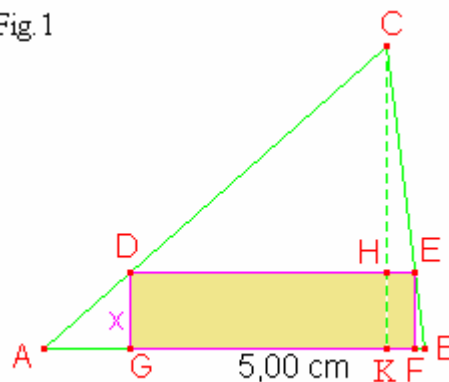
In un triangolo con i lati che misurano 4cm, 5cm, 6cm si deve inscrivere un rettangolo avente una dimensione sul lato di misura 5cm.

1. Determinare le dimensioni del rettangolo avente area massima.
2. Determinare le dimensioni del rettangolo inscritto che in una rotazione completa attorno al lato del triangolo su cui poggia la base del rettangolo descrive il cilindro di volume massimo.
3. Valutare il valore di verità della seguente proposizione: <<Il rettangolo di area massima determinato nel precedente punto è anche quello che nella rotazione completa di cui al punto n.2 descrive anche il cilindro di superficie laterale massima>>.
4. Determinare le dimensioni del rettangolo inscritto che nella rotazione descrive il cilindro avente superficie totale è massima.

Soluzione

A lato è riportata la figura di riferimento. Precisiamo che il triangolo ABC è in scala ed è stato costruito con Cabri.

Fig.1



Strategia risolutiva

Determineremo innanzitutto la misura dell'altezza del triangolo relativa al lato su cui poggia il rettangolo inscritto, quindi, indicando con x la misura dell'altezza del rettangolo, applicando la similitudine ai triangoli ABC, DEC determineremo in funzione di x la base DE, seconda dimensione del rettangolo e potremo così esprimere l'area del poligono. Si tratterà di determinare il massimo della funzione area trovata.

Il teorema di Weierstrass assicurerà l'esistenza del massimo giacché la funzione ottenuta sarà continua e definita in un intervallo chiuso. Rimane da precisare che determineremo l'altezza del triangolo indicata utilizzando la formula di Erone per l'area del triangolo.

Per la risoluzione dei quesiti n.2 e 3, una volta determinate le dimensioni del rettangolo in funzione di x si tratterà di esprimere la misura del volume del cilindro circolare retto descritto dal rettangolo DEFG e ...per il terzo quesito una semplice riflessione ci permetterà di affermare che...

Per il quarto quesito si dovrà esprimere in funzione di x il valore dell'area totale del cilindro e determinarne il massimo.

1. Ricordiamo che l'area S di un triangolo di cui si conoscano le misure a, b, c dei suoi lati, indicando con $2p$ la misura del perimetro dello stesso, è

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{15}{2} \left(\frac{15}{2} - 4 \right) \left(\frac{15}{2} - 6 \right) \left(\frac{15}{2} - 5 \right)} \text{ cm}^2 = \frac{15}{4} \sqrt{7} \text{ cm}^2$$

Indicata con h la misura dell'altezza del triangolo relativa al lato AB di misura 5cm, sappiamo che risulta anche

$$S = \frac{AB \cdot h}{2} \rightarrow h = \frac{2 \cdot S}{AB} = \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{4} \sqrt{7} \text{ cm} = \frac{3}{2} \sqrt{7} \text{ cm}$$

Sia H il punto di intersezione dell'altezza del triangolo relativa al lato AB con il lato DE del rettangolo. Ponendo $\overline{DG} = x$, questo valore varia tra zero e la misura dell'altezza:

$$0 \leq x \leq \frac{3}{2} \sqrt{7} \text{ cm}. \text{ Certamente gli estremi dell'intervallo non rappresenteranno la}$$

soluzione perché in corrispondenza a ciascuno dei due valori il rettangolo degenera in

un doppio segmento e la sua area è nulla, quindi ha valore minimo. Conviene però considerare la variabile x nell'intervallo chiuso in modo da poter applicare il teorema di Weierstrass al momento opportuno.

Osserviamo che $\overline{CH} = \overline{CK} - \overline{DG} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{7} - x\right)cm$. I triangoli ABC, CDE sono simili

perché hanno gli angoli ordinatamente congruenti, quindi sussiste la seguente proporzione

$$\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{CK} : \overline{CH} \rightarrow \overline{DE} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{\overline{CK}} = \frac{5}{\frac{3}{2}\sqrt{7}} \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{7} - x\right)cm = \left(5 - \frac{10}{21}\sqrt{7}x\right)cm$$

L'area del rettangolo inscritto è dunque

$$S(x) = \overline{DG} \cdot \overline{DE} = x \cdot \left(5 - \frac{10}{21}\sqrt{7}x\right)cm^2 = \frac{5}{21}(21x - 2\sqrt{7}x^2)cm^2$$

La funzione ottenuta è un polinomio di secondo grado, è continua ed è definita in un intervallo chiuso, dunque, per il teorema di Weierstrass, ammette sia il massimo che il minimo assoluti. A noi interessa il massimo. Poiché la funzione è derivabile in tutto il dominio si può ricorrere alla derivata prima (giacché si pensa di risolvere il quesito come applicazione dell'analisi matematica) oppure osservare semplicemente che la curva di equazione $y = 21x - 2\sqrt{7}x^2$ è una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, con concavità rivolta verso il basso e conseguentemente che l'ascissa del suo vertice rappresenta il punto di massimo per la funzione. Quindi

$x = \frac{21}{4\sqrt{7}} = \frac{3}{4}\sqrt{7}$ è il punto di massimo. Lasciamo al lettore il compito di trovare lo

stesso risultato applicando il calcolo differenziale. In conclusione il valore massimo dell'area è

$$S_{\max} = \frac{3}{4}\sqrt{7} \cdot \left(5 - \frac{10}{21}\sqrt{7} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{7}\right)cm^2 = \frac{15}{8}\sqrt{7}cm^2$$

e le misure dei lati del rettangolo di area massima sono

$$\overline{DG} = \frac{3}{4}\sqrt{7}cm, \quad \overline{DE} = \left(5 - \frac{10}{21}\sqrt{7} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{7}\right)cm = \frac{5}{2}cm.$$

2. Per questo quesito facciamo riferimento alla figura Fig.2 .

Il volume del cilindro dipende ovviamente da x ed è

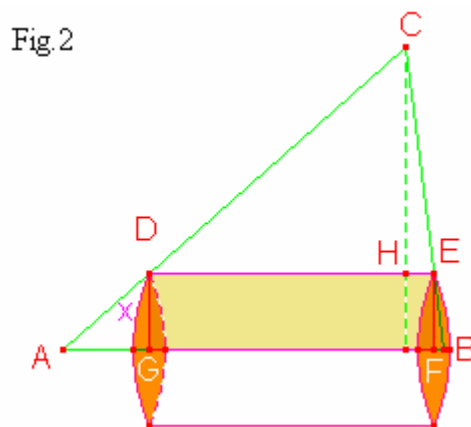
$$V(x) = \pi \cdot \overline{DG}^2 \cdot \overline{DE} = \pi x^2 \left(5 - \frac{10}{21}\sqrt{7}x\right)cm^3 \rightarrow$$

$$V(x) = \frac{5}{21}\pi(21x^2 - 2\sqrt{7}x^3)cm^3,$$

con x variabile nell'intervallo $\left[0; \frac{3}{2}\sqrt{7}\right]$.

Per trovare il valor di x per cui il volume è massimo determiniamo la funzione derivata prima e studiamone segno e zeri.

$$V'(x) = \frac{5}{21}\pi(42x - 6\sqrt{7}x^2) \geq 0$$



La disuguaglianza è soddisfatta per $0 \leq x \leq \sqrt{7}$, dunque la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $]0; \sqrt{7}[$, strettamente decrescente nell'intervallo $]\sqrt{7}; \frac{3}{2}\sqrt{7}[$,

per cui $x = \sqrt{7}$ è punto di massimo relativo ed anche assoluto per la funzione; il valore del massimo è

$$V(\sqrt{7}) = 5\pi \cdot 7 \left(1 - \frac{2}{21}\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}\right) cm^3 = 35\pi \left(1 - \frac{2}{3}\right) cm^3 = \frac{35}{3}\pi cm^3$$

3. Vogliamo dimostrare che **la proposizione è vera**; cioè, il rettangolo di area massima è anche quello che descrive nella rotazione il cilindro di superficie laterale massima. Infatti, il valore della superficie laterale del cilindro è

$$S_l = 2\pi \overline{DG} \cdot \overline{DE}$$

Si osserva che il valore della superficie laterale è massimo quando è massimo il prodotto $\overline{DG} \cdot \overline{DE}$, cioè quello delle dimensioni del rettangolo inscritto. Siccome tale prodotto esprime l'area del rettangolo, si conclude che la superficie laterale del cilindro è massima quando è massima l'area del rettangolo, quindi quando a ruotare è proprio il rettangolo di area massima.

4. Per la risoluzione di questo quesito osserviamo che l'area della **superficie totale** del cilindro descritto nella rotazione dal rettangolo in questione è espressa dalla seguente funzione

$$\Sigma(x) = 2\pi \overline{DG}^2 + 2\pi \overline{DG} \cdot \overline{DE} = 2\pi \overline{DG} (\overline{DG} + \overline{DE}) = 2\pi x \cdot \left(x + 5 - \frac{10}{21}\sqrt{7}x\right) cm^2$$

Studio del segno della funzione derivata prima.

$$\Sigma'(x) = 2\pi \left(2x + 5 - \frac{10}{21}\sqrt{7} \cdot 2x\right) \geq 0 \rightarrow \frac{42 - 20\sqrt{7}}{21}x + 5 \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{15(10\sqrt{7} + 21)}{74}$$

Concludiamo che per $x = \frac{15(10\sqrt{7} + 21)}{74}$ si ottiene il cilindro di rotazione avente superficie totale massima.

N.B. Anche in questo caso, come nella trattazione del precedente quesito n.1, avremmo potuto sfruttare le conoscenze sulla parabola per determinare il valore dell'ascissa del

punto di massimo. Considerando la parabola di equazione $y = 5x + \left(1 - \frac{10}{21}\sqrt{7}\right)x^2$, il

punto di massimo per la funzione è il vertice e dunque la sua ascissa rappresenta il valore cercato per la variabile.