

Liceo Scientifico Statale “G. Stampacchia”
Tricase

Tempo di lavoro
4 ore

Oggetto: Prova comune finale per le classi 5A-5C-5H-5I

Alunno: _____ Classe _____

L'alunno è tenuto a svolgere uno dei due problemi proposti e cinque dei quesiti inclusi nel questionario. E' ammesso l'uso della calcolatrice non programmabile.

Problema_1

Considerata la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + x + a), & x < 0 \\ \ln(e - x), & 0 \leq x < e \end{cases}$$

risolvere i quesiti che seguono.

- Calcolare il valore del parametro a in modo che la funzione risulti continua nel suo dominio.
- Studiare la funzione ottenuta, precisando il suo segno, gli zeri, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo o assoluti, gli asintoti, la concavità ed i flessi. Rappresentare il diagramma della funzione.
- Precisare se la funzione è derivabile nel punto $x=0$; in caso negativo, scrivere le equazioni delle semitangenti sinistra e destra nel punto $A(0;f(0))$ e determinare l'ampiezza dell'angolo formato dalle stesse.
- Determinare l'area della regione di piano a sinistra dell'asse y , delimitata dal diagramma della funzione, dall'asse x e dall'asse y .

* * * * *

Problema_2

In relazione alla funzione $f(x) = x + a + \frac{bx}{x^2 - 1}$

Risolvere i quesiti che seguono.

- Determinare i valori dei parametri a e b in modo che $f(x)$ abbia uno zero in $x=2$ e abbia un unico punto di flesso con tangente orizzontale.
- Verificato che le condizioni richieste nel precedente punto sono soddisfatte per $a = -\frac{8}{3}$ e $b=1$, studiare la funzione ottenuta e tracciarne il grafico.
- Calcolare l'area A della regione finita di piano delimitata dal grafico di $f(x)$, dal suo asintoto obliquo e dalle rette $x=2$, $x=c$, con $c > 2$.
- Stabilire per quale valore di c risulta $A=1$.
- Precisare per quale valore di k il teorema di Rolle è applicabile alla funzione nell'intervallo $[-2; k]$

* * * * *

QUESTIONARIO

- 1) Dimostrare che l'equazione $x^5 + 30x + 2011 = 0$ ammette solo una soluzione reale e indicarne un valore approssimato con errore inferiore a un decimo.
- 2) Considerata la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, determinare il suo valore medio relativamente all'intervallo $[0;1]$; successivamente determinare il punto o i punti dell'intervallo in cui la funzione assume il suddetto valore medio.
- 3) In uno scaffale si devono sistemare 3 libri di Italiano, 4 libri di Scienze e 5 libri di Matematica. I libri di una stessa disciplina devono essere consecutivi e l'ordine casuale, ma i libri di Scienze devono essere adiacenti a quelli di Matematica. Determinare in quanti modi è possibile sistemare i 12 libri nello scaffale.
- 4) Calcolare $\int x \arctg x \, dx$
- 5) Tra tutte le piramidi quadrangolari regolari per le quali è costante e uguale a l la somma dell'altezza e dell'apotema, determinare quella di massimo volume.
- 6) Verificare che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t}) \, dt}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}$
- 7) Assegnata una sfera di raggio r , dimostrare che il cono di volume minimo ad essa circoscritto è quello di altezza $4r$.
- 8) Calcolare il valore dell'integrale definito $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} \, dx$
- 9) Rappresentare nel piano cartesiano la conica cui appartiene il diagramma della seguente funzione $y = \frac{1}{2}\sqrt{9x^2 - 36}$ e successivamente calcolare il volume del solido descritto in una rotazione completa attorno all'asse x dalla regione finita di piano delimitata dal diagramma della funzione, dall'asse delle ascisse e dalla retta $x = 5$.
- 10) Calcolare l'integrale definito $\int_0^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 - (3x-1)^2} \, dx$