Valore approssimato dello zero di un polinomio

Cenno al metodo di bisezione

[1]Quesito

Dimostrare che l'equazione $x^5+30x+2011=0$ ammette solo una soluzione reale e indicarne un valore approssimato con errore inferiore a un decimo.

Soluzione

Ogni polinomio di grado dispari a coefficienti reali ammette almeno uno zero reale; questa proprietà si può giustificare applicando il teorema di esistenza degli zeri per una funzione continua. Nel nostro caso, essendo il polinomio una funzione continua, e risultando $P(0)=2011>0$, $P(-5)=-1264<0$, esiste almeno uno zero interno all'intervallo [-5;0]. Affinando la ricerca, poiché $P(-4)=867>0$, possiamo affermare che internamente all'intervallo [-5;-4] deve cadere almeno uno zero.

Unicità dello zero del polinomio nel campo reale.

L'unicità dello zero discende dalle caratteristiche di monotonia della funzione polinomio

$$P(x)=x^5+30x+2011.$$

Infatti, la sua derivata prima è

$$P'(x)=5x^4+30 \ ,$$

che è positiva su tutto l'asse reale e dunque la funzione è strettamente crescente. Lo zero è unico[2].

Dovendo determinare un valore approssimato dello zero in questione con errore inferiore a 10^{-1} procediamo come segue.

a) Scegliamo come punto-spia il valore medio tra $x_1=-5, x_2=-4$, cioè $x_m=(-5-4)/2=-4,5$ e osserviamo che $P(-4,5)=30,71875>0$; quindi possiamo affermare che lo zero è interno all'intervallo [-5;-4,5].

b) Procediamo e scegliamo come punto-spia il punto medio dell'intervallo [-5;-4,5]: $x_m=(-5-4,5)/2=-4,75$ e calcoliamo il polinomio nello stesso punto. Si ha: $P(-4,75)\simeq-549,57<0$; si conclude che lo zero è interno all'intervallo [-4,75;-4,5].

c) Si procede scegliendo come punto-spia il punto medio del nuovo intervallo [-4,75;-4,5]: $x_m=(-4,75-4,5)/2=-4,625$

Calcolando il valore del polinomio nel punto si ha: $P(-4,625)\simeq-243,96<0$; quindi lo zero del polinomio è interno all'intervallo [-4,625;-4,5].

Il processo applicato deve essere replicato finché non si verifica la proprietà richiesta per lo zero cercato.

Ora, sapendo che lo zero è interno all'intervallo [-4,625;-4,5], possiamo pensare di scegliere come valore approssimato dello zero il punto medio dell'intervallo (questa è una scelta, ma è una buona scelta dal punto di vista operativo); ma dobbiamo individuare il *parametro qualitativo* che indichi "*quanto sia adeguato il valore scelto*". Ebbene, questo parametro è rappresentato dall'*ampiezza dell'intervallo che contiene lo zero cercato*. Chiariamo il concetto.

---

[1] Quesito assegnato in una prova scritta in una quinta classe di Liceo Scientifico M8_5I-30-05-11

[2] Facciamo notare che se esistessero due punti x_1, x_2 in cui si annullasse la funzione, nell'intervallo [x_1; x_2] la funzione verificherebbe le ipotesi del teorema di Rolle, perciò si dovrebbe annullare in almeno un punto al derivata prima, ma ciò non si verifica, essendo la derivata prima strettamente positiva in R.

L'ampiezza dell'ultimo intervallo contenente lo zero è

$$\delta=-4{,}5+4{,}625=0{,}125$$

e quindi la semiampiezza è

$$\delta/2=0{,}0625.$$

Assumendo come valore rappresentativo dello zero del polinomio il centro dell'ultimo intervallo, cioè

$$x_m=(-4{,}625-4{,}5)/2=-4{,}5625,$$

poiché la sua distanza dal valore dello zero effettivo del polinomio, anche se questo rimane ancora incognito, è minore della semiampiezza dell'intervallo

$$\delta/2=0{,}0625<10^{-1},$$

possiamo concludere che $x_m=-4{,}5625$ rappresenta un'approssimazione dello zero con errore inferiore ad 1/10.

Un aiuto dalle tecnologie informatiche

A beneficio e per comodità del lettore, abbiamo riportato in tabella alcune delle elaborazioni ottenute con Excel dopo aver predisposto nelle celle della zona di elaborazione le formule per la gestione automatica della ricerca dello zero del polinomio a partire dall'intervallo [-5;-4][3].

Il lettore può ripercorrere i passi illustrati prima per arrivare a

a = -5		b = -4	$\alpha = x_m$		
N	x_1	x_2	$x_m=(x_1+x_2)/2$	$P(x_m)$	$l=x_2-x_1$
0	-5,0000000	-4,0000000	-4,5000000	30,718750	1,0000000
1	-5,0000000	-4,5000000	-4,7500000	-549,565430	0,5000000
2	-4,7500000	-4,5000000	-4,6250000	-243,959625	0,2500000
3	-4,6250000	-4,5000000	**-4,5625000**	-102,910134	0,1250000
4	-4,5625000	-4,5000000	-4,5312500	-35,187110	0,0625000
5	-4,5312500	-4,5000000	-4,5156250	-2,009380	0,0312500

determinare il valore $x_m=-4{,}5625$; questo valore è evidenziato in colore rosso.

Dalla tabella si evince che un valore migliore dello zero è -4,515625. La ricerca può essere spinta oltre ed ottenere valori approssimati dello zero affetti da errore piccolo a piacere, ma non si ritiene di approfondire in questa sede ulteriormente la questione.

[3] E' bene precisare che le competenze necessarie per la ricerca dello zero di una funzione con il metodo descritto, noto come **metodo di bisezione o dicotomico**, utilizzando un elaboratore, non rientrano tra gli obiettivi formativi degli studenti del Corso di Ordinamento del Liceo Scientifico, mentre lo sono per gli studenti dei Corsi Sperimentali, come il PNI, nei quali si affrontano anche alcune questioni di analisi numerica.