

Valore approssimato dello zero di un polinomio

Cenno al metodo di bisezione

⁽¹⁾Quesito

Dimostrare che l'equazione $x^5 + 30x + 2011 = 0$ ammette solo una soluzione reale e indicarne un valore approssimato con errore inferiore a un decimo.

Soluzione

Ogni polinomio di grado dispari a coefficienti reali ammette almeno uno zero reale; questa proprietà si può giustificare applicando il teorema di esistenza degli zeri per una funzione continua. Nel nostro caso, essendo il polinomio una funzione continua, e risultando $P(0) = 2011 > 0$, $P(-5) = -1264 < 0$, ...

Unicità dello zero del polinomio nel campo reale.

L'unicità dello zero discende dalle caratteristiche di monotonia della funzione polinomio

$$P(x) = x^5 + 30x + 2011.$$

Infatti, la sua derivata prima è

$$P'(x) = 5x^4 + 30,$$

...

Dovendo determinare un valore approssimato dello zero in questione con errore inferiore a 10^{-1} procediamo come segue.

a) Scegliamo come punto-spia il valore medio tra $x_1 = -5$, $x_2 = -4$, cioè

$x_m = (-5 - 4) / 2 = -4,5$ e osserviamo che $P(-4,5) = 30,71875 > 0$; quindi possiamo affermare che lo zero è interno all'intervallo $[-5; -4,5]$.

...

possiamo concludere che $x_m = -4,5625$ rappresenta un'approssimazione dello zero con errore inferiore ad $1/10$.

Un aiuto dalle tecnologie informatiche

A beneficio e per comodità del lettore, abbiamo riportato in tabella alcune delle elaborazioni ottenute con Excel ...

⁽¹⁾ Quesito assegnato in una prova scritta in una quinta classe di Liceo Scientifico M8_5I-30-05-11