

Problema geometrico

Ricerca di un rettangolo di area massima

⁽¹⁾Problema_2

Considerato il triangolo ABC isoscele sulla base AB, con $\overline{AB} = 2a$, ed avente $BC = 2AB$, inscrivere il rettangolo PQRS con i vertici P e Q su AB, il vertice R su BC ed il vertice S su AC, in modo che la sua area sia massima. Determinare il valore dell'area massima in funzione del parametro a . (Porre $\overline{PQ} = 2x$).

Soluzione

Strategia risolutiva

Rispettando l'indicazione suggerita, cioè di porre $\overline{PQ} = 2x$, si deve esprimere in funzione della variabile x la misura dell'area del rettangolo PQRS e studiare la funzione ottenuta nell'intervallo che rappresenterà il dominio di variabilità di x al fine di trovarne il massimo. Troveremo gli elementi necessari ricorrendo alla similitudine di due triangoli.

Elaborazioni

Facciamo riferimento alla figura riportata a margine.

Il rettangolo PQRS ha $\overline{PQ} = \overline{RS} = 2x$, con $0 \leq \overline{PQ} \leq \overline{AB}$ e quindi $0 \leq 2x \leq 2a$, cioè $0 \leq x \leq a$.

Dai dati del problema sappiamo che $\overline{AB} = 2a$, $\overline{BC} = 2\overline{AB} = 4a$.

L'altezza CH del triangolo isoscele ABC misura

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{HB}^2} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{HB}^2} = \sqrt{16a^2 - a^2} = a\sqrt{15}.$$

Avendo posto $\overline{PQ} = 2x$, occorre trovare la misura della dimensione QR in funzione di x per determinare l'area del rettangolo PQRS.

Dalla similitudine dei triangoli BQR, BHC si deduce

$$RQ:QB = CH:HB \text{ e poich\'e } \overline{HQ} = \overline{PH} = x \rightarrow \overline{QB} = \overline{HB} - \overline{HQ} = a - x.$$

Dalla proporzione ricaviamo

$$\overline{RQ} = \frac{\overline{QB} \cdot \overline{CH}}{\overline{HB}} = \frac{(a-x) \cdot a\sqrt{15}}{a} = \sqrt{15}(a-x)$$

L'area del rettangolo PQRS è

$$f(x) = \overline{PQ} \cdot \overline{QR} = 2\sqrt{15}x(a-x)$$

Si deve determinare il valore di x per cui la funzione $f(x)$ è massima.

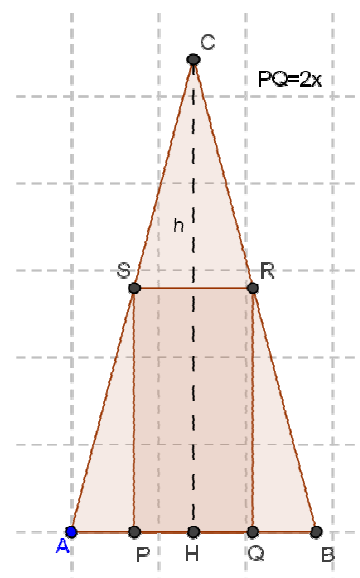
Con il dominio di variabilità $0 \leq x \leq a$ troviamo la derivata prima

$$f'(x) = 2\sqrt{15}(a-2x) \text{ e poich\'e risulta}$$

$$2\sqrt{15}(a-2x) \geq 0 \text{ per } x \leq \frac{a}{2}, \text{ si conclude che la funzione ha nel punto}$$

$$x = \frac{a}{2} \text{ un massimo relativo, che in realt\'a \'} \text{ il massimo assoluto perch\'e}$$

agli estremi del dominio la funzione si annulla.



Apri la figura con GeoGebra per modificare le dimensioni del triangolo ABC o per osservare come cambia il valore dell'area del rettangolo PQRS.

⁽¹⁾ Problema assegnato in una classe quinta: M6_5I-14-04-11



Valore del massimo:

$$M_{\max} = f\left(\frac{a}{2}\right) = 2\sqrt{15} \cdot \frac{a}{2} \left(a - \frac{a}{2}\right) = \frac{a^2\sqrt{15}}{2}$$

