Sulla geometria analitica della parabola

Ricerca di una corda di lunghezza massima

[(1)]**Problema_1** (Problema di massimo)

Q1- Considerate le parabole $\lambda_1 : y = \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$, $\lambda_2 : y = -x^2 + ax$, determinare il valore del parametro a in modo che λ_2 passi dal punto di λ_1 avente ascissa unitaria. Rappresentare le due parabole nello stesso riferimento cartesiano xOy.

Q2- Siano x_1, x_2, le ascisse dei due punti comuni alle due parabole λ_1, λ_2, con $x_1 < x_2$. Considerata la retta $s : x = k$, con $x_1 \le k \le x_2$, siano P su λ_1 e Q su λ_2 i punti aventi ascissa k. Determinare il valore di k per il quale il segmento PQ ha lunghezza massima.

Soluzione

Q1- Il punto A della parabola λ_1 avente ascissa x=1 ha ordinata -1/4; $A\left(1; -\frac{1}{4}\right)$. Si determina il valore del parametro a nell'equazione della parabola λ_2 semplicemente imponendo che le cordonate di A verifichino l'equazione della curva.

$$A \in \lambda_2 \rightarrow -\frac{1}{4} = -1 + a \rightarrow a = \frac{3}{4} \rightarrow \lambda_2 : y = -x^2 + \frac{3}{4}x$$

Le due parabole sono rappresentate in Figura 1;

i vertici sono $V_1\left(\frac{3}{5}; -\frac{9}{20}\right), V_2\left(\frac{3}{8}; \frac{9}{64}\right)$.

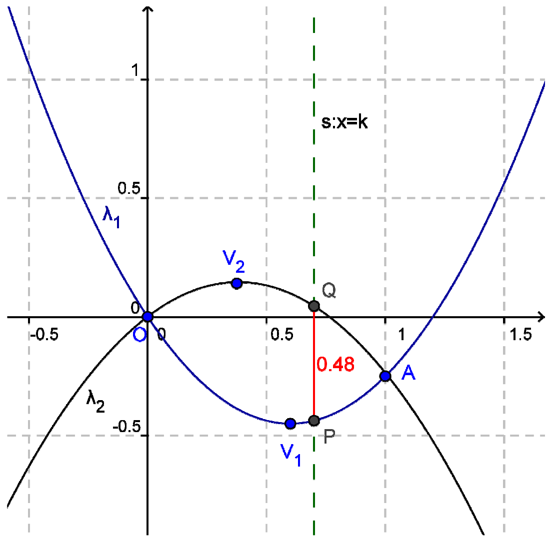

Figura 1- Parabole a confronto. Al variare della posizione della retta s cambia la misura del segmento PQ.

Q2- Le due parabole si tagliano in due punti, uno è l'origine O degli assi, l'altro è il punto A precedentemente determinato, pertanto risulta $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

La retta $s : x = k$ interseca la parabola λ_1 nel punto $P\left(k; \frac{5}{4}k^2 - \frac{3}{2}k\right)$ e la parabola λ_2 nel punto $Q\left(k; -k^2 + \frac{3}{4}k\right)$. Il parametro k deve soddisfare le limitazioni $0 \le k \le 1$ e per questi valori l'ordinata del punto Q è non minore dell'ordinata del punto P.

La misura assoluta del segmento PQ è

$$\overline{PQ} = y_Q - y_P = -k^2 + \frac{3}{4}k - \left(\frac{5}{4}k^2 - \frac{3}{2}k\right) = -\frac{9}{4}k^2 + \frac{9}{4}k$$

Si deve determinare il valore del parametro k che rende massima la funzione

$$\varphi(k) = -\frac{9}{4}k^2 + \frac{9}{4}k\text{, con } 0 \le k \le 1.$$

(1) Problema assegnato in una classe quinta: M6_5I-14-04-11

Osserviamo che la funzione di cui determinare il massimo è un polinomio, quindi continua e dotata di derivate di qualsiasi ordine; poiché la si deve considerare in un intervallo chiuso e limitato, in virtù del teorema di Weierstrass siamo certi che ammetterà il valore massimo.
Per la ricerca del punto di massimo determiniamo la derivata prima della funzione e studiamone segno e zeri.

$$\varphi'(k) = -\frac{9}{2}k + \frac{9}{4} \geq 0$$

La disequazione è soddisfatta per $k \leq \frac{1}{2}$ e dunque, limitatamente all'intervallo [0;1], la funzione è strettamente crescente in $\left]0;\frac{1}{2}\right[$, strettamente decrescente in $\left]\frac{1}{2};1\right[$. Il punto $k = \frac{1}{2}$ è di massimo relativo proprio, con

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}$$

Il punto è addirittura di **massimo assoluto**, come si evince velocemente confrontando il valore del massimo relativo con i valori assunti dalla funzione agli estremi dell'intervallo, dove si annulla.
In **Figura 2** sono state rappresentate le due parabole, la retta s ed è evidenziato il segmento PQ intercettato sulla retta s ed avente lunghezza massima. Si osservi che 9:16=0,5625 e quindi il valore 0,57 indicato in figura rappresenta il valore arrotondato a meno di un centesimo della misura effettiva.

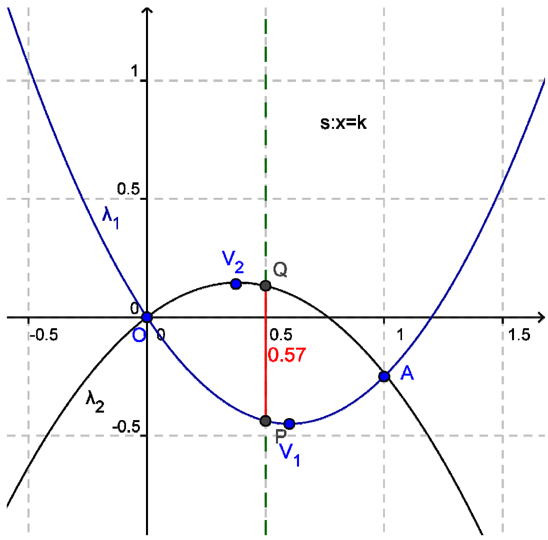

Figura 2- In figura è rappresentata la situazione geometrica in cui la misura di PQ è massima. [Apri la figura] con GeoGebra per osservare come varia la misura di PQ.