

Esercizi sui punti stazionari, sui punti di flesso e sulla monotonia

Funzione goniometrica, funzione esponenziale, funzione logaritmica

⁽¹⁾ Affrontare i seguenti quesiti

- Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f(x) = \sin^3 x$, per $0 \leq x \leq 2\pi$.
- Determinare i punti di massimo, i punti di minimo e gli eventuali punti di flesso della funzione $g(x) = x^2 e^{-3x}$.
- Della funzione $h(x) = \log(x^2 + 1) - x$, determinare gli intervalli di monotonia, gli eventuali punti di flesso ed il loro tipo.

Soluzione

a) $f(x) = \sin^3 x \rightarrow f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$

Limitatamente all'intervallo $[0; 2\pi]$ la funzione derivata prima si annulla nei punti:

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \pi, x_4 = \frac{3\pi}{2}, x_5 = 2\pi.$$

Osservazione

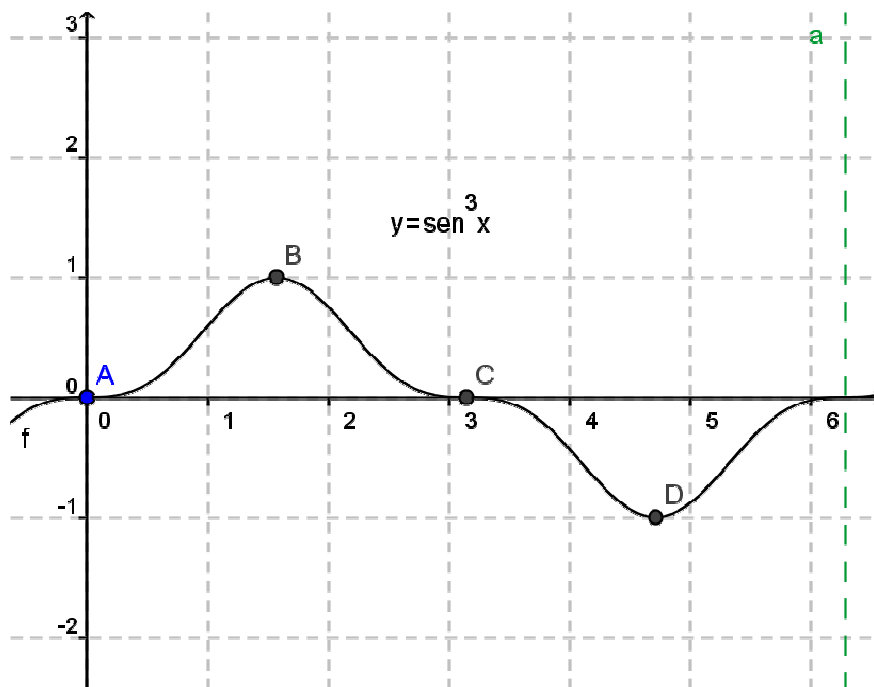
Dato che la funzione è periodica di periodo $T=2\pi$, nei punti 0 e 2π ha lo stesso comportamento.

Per classificare i punti stazionari trovati determiniamo la derivata seconda e la derivata terza.

$$f''(x) = 3(2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x) = 3\sin x (3\cos^2 x - 1)$$

$$f'''(x) = 3\cos x (3\cos^2 x - 6\sin^2 x - 1)$$

- $x_1 = 0 \rightarrow$
 $f''(0) = 0,$
 $f'''(0) = 6 > 0$
 il punto è di flesso ascendente;
- $x_2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow$
 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 < 0$
 il punto è di massimo relativo;
- $x_3 = \pi \rightarrow$
 $f''(\pi) = 0,$
 $f'''(\pi) = -6 < 0$
 il punto è di flesso discendente;
- $x_4 = \frac{3\pi}{2} \rightarrow$
 il punto è di minimo relativo.



⁽¹⁾ Esercizi assegnati nel compito in classe M5_5I-14-04-11



b) $g(x) = x^2 e^{-3x} \rightarrow g'(x) = 2xe^{-3x} - 3x^2 e^{-3x} = (2x - 3x^2)e^{-3x}$

I **punti stazionari** sono $x_1=0$, $x_2=2/3$.

Classificazione

$$g''(x) = (9x^2 - 12x + 2)e^{-3x}$$

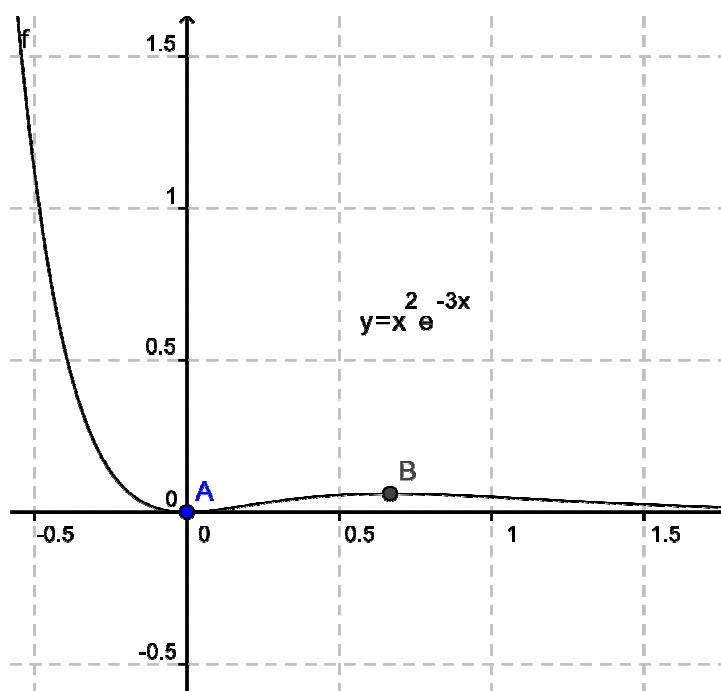
- $x=0$, $g''(0) = 2 > 0$, il punto è di minimo relativo; il punto è anche di minimo assoluto.
- $x = \frac{2}{3}$, $g''\left(\frac{2}{3}\right) = -2e^{-2} < 0$, il punto è di massimo relativo.

Punti di flesso

La derivata seconda si annulla nei punti $x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{3}$.

$x = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$ è punto di flesso discendente;

$x = \frac{2 + \sqrt{2}}{3}$ è punto di flesso ascendente.



c) $h(x) = \log(x^2 + 1) - x$

Dominio di definizione e derivabilità

La funzione è definita su tutto l'asse reale, è continua e derivabile in tutto il dominio.

Monotonia



La funzione derivata prima è

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 1 = -\frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = -\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

Si osserva che $h'(x) = 0$ solo nel punto $x=1$ e negli altri punti del dominio risulta $h'(x) < 0$; deduciamo che la funzione è strettamente decrescente in ogni punto del dominio e che in particolare nel punto $x=0$ il diagramma ammette retta tangente orizzontale; il punto $x=0$ è anche di flesso (discendente, come si riconoscerà tra breve).

Ricerca dei punti di flesso e loro classificazione

La funzione ammette derivate di qualsiasi ordine; per stabilire se esistono altri punti di flesso calcoliamo la derivata seconda.

$$h''(x) = -\frac{2(x-1)(x^2+1) - 2x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} = -\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$h''(x) = 0$ nei punti $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Segno della derivata seconda

$h''(x) > 0$ per $-1 < x < 1$;

$h''(x) < 0$ in ciascuno degli intervalli $]-\infty; -1[$, $1; +\infty[$.

Il diagramma della funzione volge la concavità verso l'alto (la funzione è convessa) nell'intervallo $]-1; 1[$ e la concavità verso il basso (la funzione è concava) in ciascuno degli intervalli $]-\infty; -1[$, $1; +\infty[$.

I punti di flesso sono soltanto $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Classificazione

Per il punto $x_1 = -1$, considerato che $h'(-1) \neq 0$, si tratta di un punto di flesso con tangente obliqua ed il punto è di flesso ascendente; per il punto $x_2 = 1$ confermiamo che è un punto di flesso a tangente orizzontale ed è discendente (perché esiste un intorno completo del punto in cui risulta $h''(x) > 0$ a sinistra del punto, quindi la concavità del diagramma è rivolta verso l'alto, e $h''(x) < 0$ a destra del punto, quindi la concavità è rivolta verso il basso).

Per i dettagli sul diagramma osservare la rappresentazione del grafico.

Equazioni delle tangenti inflectionali

Nel punto $F_1(-1; h(-1))$,

$$t_1: y - h(-1) = h'(-1)(x + 1) \rightarrow$$

$$t_1: y = -1,98x + 0,06;$$

nel punto $F_2(1; h(1))$, $t_2: y - h(1) = 0 \rightarrow t_2: y = -0,33$.

