

⁽¹⁾Problema_1

Considerata la funzione $f(x) = ax^2 + x - \log|bx + c|$, con a, b, c parametri reali diversi da zero, risolvere i quesiti che seguono.

Q1-Precisare il dominio e determinare le relazioni tra i parametri a, b, c sapendo che $f'(1) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$. Esplicitare la forma analitica della funzione corrispondente.

Q2-Riconosciuto che il punto $x=1$ per la funzione $f(x)$ è di massimo relativo, trovare l'espressione della funzione che verifica l'ulteriore condizione $f(1) = 0$.

Q3- Studiare la funzione $y=f(x)$ e rappresentare il suo grafico nel riferimento cartesiano xOy , prescindendo dalla ricerca di tutti i suoi zeri, determinando in particolare gli eventuali punti di flesso. Riconoscere che esistono due punti di flesso, scrivere l'equazione della tangente al diagramma nel punto di flesso avente ascissa positiva.

Q4-Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dagli assi cartesiani e dal diagramma della funzione giacente nel quarto quadrante.

Soluzione

Q1- La funzione è definita per ogni valore reale della variabile che rende diverso da zero l'argomento della funzione logaritmica. Dunque, deve essere $bx + c \neq 0 \rightarrow x \neq -\frac{c}{b}$. Il dominio della funzione è $A = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{c}{b} \right\}$.

La funzione derivata prima è $f'(x) = 2ax + 1 - \frac{b}{bx + c}$.

La funzione deve verificare due condizioni. La prima $f'(1) = 0$ implica che tra i parametri sussista la relazione

$$2a + 1 - \frac{b}{b + c} = 0 \quad (1)$$

Per quanto concerne la seconda condizione, osservato che

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} ax^2 + x - \log|bx + c| = a - 1 - \log|-b + c|,$$

si evince che la condizione può essere soddisfatta se e solo se per $x=-1$ si annulla l'argomento del logaritmo, dunque se risulta

$$-b + c = 0 \quad (2)$$

Mettendo insieme le relazioni (1) e (2) si ha

$$\begin{cases} 2a + 1 - \frac{b}{b + c} = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + 1 - \frac{b}{2b} = 0 \\ c = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ c = b \end{cases}$$

Concludiamo che l'espressione della funzione deve essere la seguente:

⁽¹⁾ Problema assegnato nella prova comune di fine percorso nelle classi quinte sperimentali 5B-5D-5E-5G, indirizzo PNI, del Liceo "G. Stampacchia" il 28-maggio-2012.

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + x - \log|bx+b|, \text{ potendo essere } b \text{ un qualsiasi valore reale non nullo.}$$

Osserviamo che per la proprietà del prodotto del logaritmo, la forma della funzione può essere anche la seguente:

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + x - \log|b| - \log|x+1| \quad (3)$$

Il dominio della funzione è $A = R - \{-1\}$.

Q2 -Per riconoscere le caratteristiche della funzione nel punto $x=1$ analizziamo la derivata seconda nello stesso punto.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{x+1} \rightarrow f''(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{(x+1)^2} \rightarrow f''(1) = -\frac{1}{4} < 0.$$

Il punto $x=1$ è di massimo relativo proprio per la funzione, con $f(1) = \frac{3}{4} - \log|b| - \log 2$.

Poiché si richiede che la funzione considerata sia tale da verificare la condizione $f(1) = 0$, deduciamo che deve risultare $\log|b| = \frac{3}{4} - \log 2$ e dunque la funzione da studiare è

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + x - \frac{3}{4} + \log 2 - \log|x+1|.$$

Q3-Segno e zeri della funzione

Sappiamo già, dalla condizione $f(1) = 0$, che $x=1$ è uno zero per la funzione.

Per avere indicazioni sull'esistenza di ulteriori zeri procediamo con il confronto grafico tra la parabola di equazione

$$\lambda_1 : y = -\frac{x^2}{4} + x - \frac{3}{4}$$

e la curva logaritmica

$$\lambda_2 : y = -\log 2 + \log|x+1|.$$

In **Figura 1** sono riportati i rispettivi grafici.

Dal confronto si evince che i due grafici si intersecano in tre punti, uno dei quali è $C(1;0)$ ed altri due sono collocati nel terzo quadrante. Dunque la funzione ammette almeno altri due zeri; siano

$$x_2 = \alpha, \text{ con } -1 < \alpha < 0; \quad x_3 = \beta, \text{ con } \beta < -1.$$

Comandi per la rappresentazione delle curve in GeoGebra

Comando per la parabola: $y = -x^2/4 + x - 3/4$;

Comando per la curva logaritmica: $y = -\ln(2) + \ln(\text{abs}(x+1))$

Limiti

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty \rightarrow \text{La retta } x = -1 \text{ è asintoto verticale.}$$

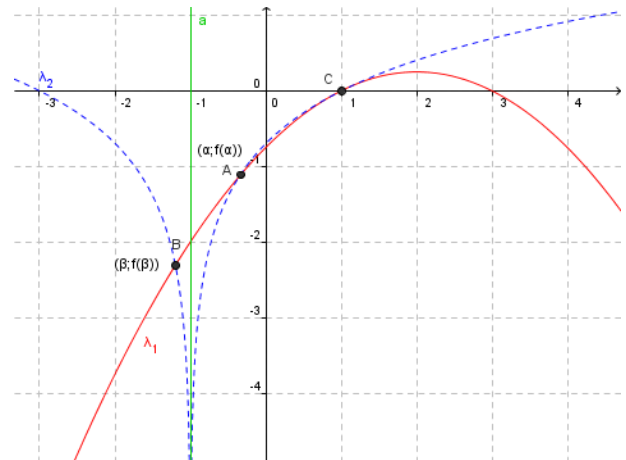


Figura 1-Confronto tra parabola e curva logaritmica.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. La funzione ha come codominio tutto \mathbb{R} .

Monotonia, massimi e minimi relativi

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x-x^2}{2(x+1)}$$

$f'(x) > 0$ con $(x < -1) \vee (0 < x < 1)$; $f'(x) < 0$, con $(-1 < x < 0) \vee (x > 1)$.

La funzione è strettamente crescente in ciascuno degli intervalli $]-\infty; -1[$, $]0; 1[$;

è strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli $]-1; 0[$, $]1; +\infty[$.

Il punto $x=0$ è di minimo relativo proprio, $f(0) = -\frac{3}{4} + \log 2 \approx -0,05685$; il punto $x=1$, è di massimo relativo proprio, con $f(1) = 0$.

Concavità e flessi

$$f''(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2-(x+1)^2}{2(x+1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

$f''(x) > 0$, con

$$x \in]-1-\sqrt{2}; -1[\cup]-1; -1+\sqrt{2}[;$$

in ciascuno dei due intervalli indicati la funzione è convessa (concavità rivolta verso l'alto);

$f''(x) < 0$, con

$$x \in]-\infty; -1-\sqrt{2}[\cup]-1+\sqrt{2}; +\infty[;$$

in ciascuno dei due intervalli indicati la funzione è concava.

Concludiamo che i punti $x_1 = -1 - \sqrt{2}$,

$x_2 = -1 + \sqrt{2}$, sono di flesso; il primo ascendente, il secondo discendente.

$$f(-1-\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(\log 2 - 5 - 3\sqrt{2}) \approx 4,275 \rightarrow F_1(-1-\sqrt{2}; 4,275);$$

$$f(-1+\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(\log 2 - 5 + 3\sqrt{2}) \approx -0,032 \rightarrow F_2(-1+\sqrt{2}; -0,032).$$

Equazione della tangente al diagramma della funzione nel punto F_2 .

$$f'(-1+\sqrt{2}) = \frac{3}{2} - \sqrt{2};$$

$$t_{F_2}: y - f(-1+\sqrt{2}) = f'(-1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2}) \rightarrow t_{F_2}: y = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)x + 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\log 2$$

Q4-Considerato che nell'intervallo in esame la funzione è negativa, l'area della regione richiesta è il valore del seguente integrale definito.

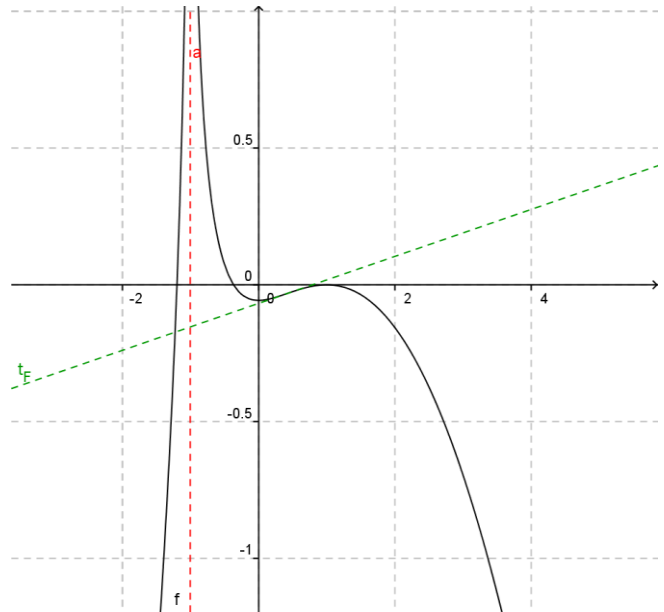


Figura 2:Diagramma della funzione e della tangente inflessionale.

$$\int_0^1 -f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{4} - x + \frac{3}{4} - \log 2 + \log|x+1| \right) dx$$

Ancora, osservato che l'argomento della funzione logaritmo nell'intervallo di integrazione è positivo, si può eliminare il simbolo di modulo.

Riportiamo le elaborazioni per l'integrale definito.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{4} - x + \frac{3}{4} - \log 2 + \log(x+1) \right) dx &= \\ \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{3}{4} - \log 2 \right) x \right]_0^1 + \int_0^1 \log(x+1) dx &= \\ \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \log 2 \right) + [x \log(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx &= \\ \frac{1-6+9}{12} - \log 2 + \log 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx &= \\ \frac{1}{3} - [x - \log(x+1)]_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + \log 2 &= \\ -\frac{2}{3} + \log 2 \approx 0,02648 \end{aligned}$$

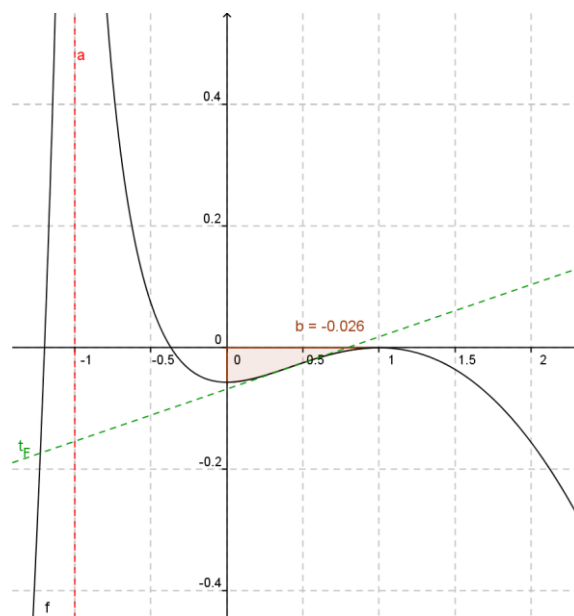


Figura 3-L'area della regione piana considerata, dall'applicazione GeoGebra, è riportata con il valore negativo perché nell'intervallo di integrazione la funzione è negativa.