

Sul teorema fondamentale del calcolo integrale

Un limite della forma 0/0

Della funzione $f(x) = \frac{1}{x^3} \int_0^x (1 - \cos^2 t) dt$, studiare il limite per $x \rightarrow 0$.

Soluzione

Osserviamo che la funzione integranda è continua su tutto l'asse reale e dunque il valore dell'integrale definito $\int_0^x (1 - \cos^2 t) dt$ per $x \rightarrow 0$ vale zero. Il limite in esame si presenta nella forma 0/0. Si può affrontare lo studio del limite ricordando il teorema fondamentale del calcolo integrale ed applicando la regola di de l'Hôpital. Si può anche eseguire il calcolo dell'integrale definito e successivamente passare allo studio del limite assegnato. Riportiamo i due metodi.

Primo metodo (utilizzo del teorema fondamentale del calcolo integrale).

Posto $G(x) = \int_0^x (1 - \cos^2 t) dt$, dal teorema fondamentale del calcolo integrale, si deduce che

$G(x)$ è una primitiva della funzione $g(x) = 1 - \cos^2 x$ per cui, applicando la regola di de l'Hôpital al limite otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1 - \cos^2 t) dt}{x^3} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

Secondo metodo

Calcoliamo prima l'integrale definito. Si ha

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \int_0^x (1 - \cos^2 t) dt = \frac{1}{x^3} \int_0^x \left(1 - \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \frac{1}{x^3} \int_0^x \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2} \right) dt =$$
$$\frac{1}{x^3} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^x = \frac{1}{x^3} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right).$$

Passiamo ora a studiare il limite richiesto.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\frac{2x - \sin 2x}{4} \right) = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{x^3} \stackrel{H.}{=} \frac{2}{4 \cdot 3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} =$$
$$\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = \frac{1}{3}$$

Come si vede è stato ottenuto lo stesso valore per il limite.

Esercizio proposto

Provare che risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x (1 - \cos t) dt = \frac{1}{6}$$