Funzioni esponenziali

Problema

Considerata la famiglia di curve avente equazione

$y = e^{2x} - (k+2)e^x - 2k \qquad (1)$

Risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Studiare la funzione ottenuta per k=0 e rappresentare il suo diagramma in un riferimento cartesiano ortogonale. Precisare l'eventuale esistenza di punti di massimo o di minimo relativo o assoluto e di punti di flesso.

Q2- Sia S(h) l'area della regione piana delimitata dall'asse delle ascisse, dal diagramma della curva studiata nel precedente quesito, dall'asse delle ordinate e dalla retta di equazione *x*=*h*, con *h*<0. Studiare il limite

$\lim_{h \to -\infty} S(h)$.

Q3- Dimostrare che tutte le curve aventi equazione (1) ammettono un asintoto orizzontale parallelo all'asse delle ascisse.

Q4- Dimostrare che tutte le curve aventi equazione (1) con k > -2 hanno un solo punto in cui la tangente alla stessa curva è parallela all'asse delle ascisse. Classificare la natura di detto punto per la funzione corrispondente.

Soluzione

Q1- Per k=0 si ha la funzione $f(x) = e^{2x} - 2e^x$.

Dominio e continuità

La funzione è definita su tutto l'asse reale, è continua ed ammette derivata di qualsiasi ordine continua.

Limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to +\infty} \left(e^{2x} - 2e^x\right) = \lim_{x \to +\infty} e^x\left(e^x - 2\right) = +\infty \cdot (+\infty - 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(e^{2x} - 2e^x\right) = e^{-\infty} - 2e^{-\infty} = 0 \to$$ L'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per *x*→-∞.

Per *x*→+∞ non esiste asintoto orizzontale, ma possiamo provare velocemente che non esiste neanche asintoto obliquo. Infatti risulta

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 2e^x}{x} \overset{H.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x} - 2e^x}{1} = \lim_{x \to +\infty} 2e^x\left(e^x - 1\right) = +\infty$$

Monotonia, massimi e minimi relativi o assoluti

Dal valore ottenuto per il limite per *x*→+∞ emerge che l'estremo superiore della funzione è +∞ e dunque la funzione non può ammettere punti di massimo assoluto.

Derivata prima

$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x\left(e^x - 1\right)$

Si evince che

$f'(x) > 0$, per x>0; $f'(x) < 0$ per x<0; $f'(x) = 0$ per *x*=0. La funzione è strettamente crescente nell'intervallo]0;+∞[, strettamente decrescente nell'intervallo]-∞;0[; il punto x=0 è di minimo assoluto: $f(0) = 1 - 2 = -1$.

Concavità, convessità e flessi

Studio del segno e degli zeri della derivata seconda

$f''(x) = 4e^{2x} - 2e^{x} = \; 2e^{x}\left(2e^{x} - 1\right)$

La derivata seconda:

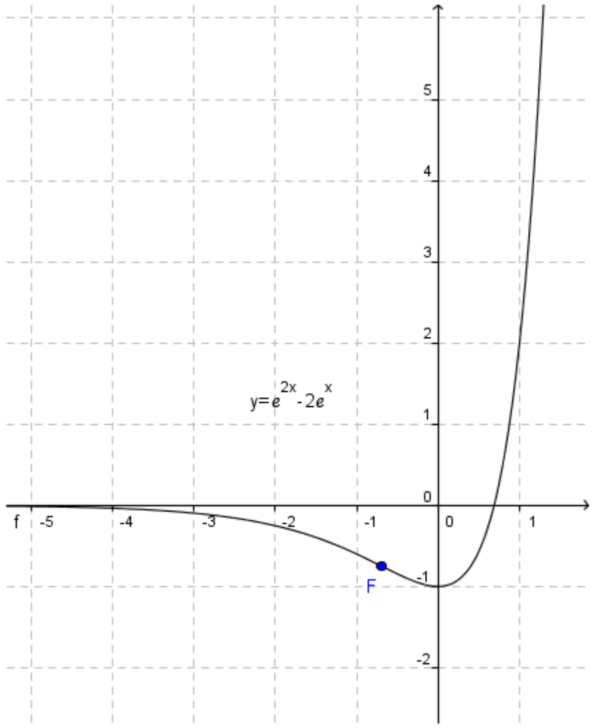
- si annulla se $2e^{x} - 1 = 0 \rightarrow$
  $x = \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log 2$;
- è positiva per $x > -\log 2$;
- è negativa per $x < -\log 2$.

Concludiamo che il punto $x = -\log 2$ è di flesso, la funzione è concava nell'intervallo]-∞;-log2[, ed è convessa nell'intervallo]-log2;+∞[.

Ordinata del punto di flesso:

$$f\left(-\log 2\right) = \; e^{2(-\log 2)} - 2e^{-\log 2} \; = \; = \frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$

Il punto di flesso è $F\left(-\log 2; -\frac{3}{4}\right)$.



A margine è rappresentato il diagramma della funzione studiata.

Q2- La regione piana in questione ha come area il valore del seguente integrale definito:

$$S\left(h\right) = \int_{h}^{0}\left[-f\left(x\right)\right]dx = \; \int_{h}^{0}\left(-e^{2x} + 2e^{x}\right)dx =$$

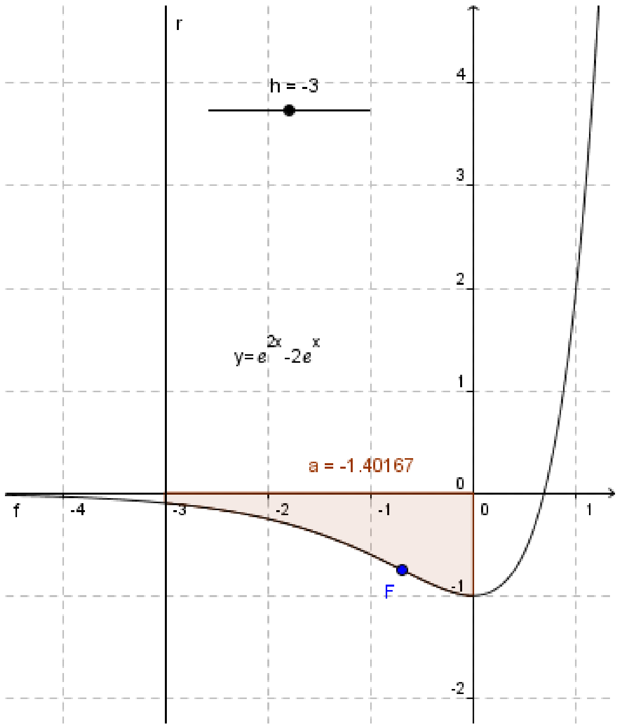
$$\left[-\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{x}\right]_{h}^{0} = \left(-\frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{2h} + 2e^{h}\right) =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{2h} - 2e^{h} \qquad (2)$$

Studio del limite richiesto

$$\lim_{h\to-\infty} S(h) = \lim_{h\to-\infty}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{2h} - 2e^{h}\right) =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-\infty} - 2e^{-\infty} = \frac{3}{2} \quad (3).$$



Operatività con GeoGebra

Per calcolare l'area S(h) della regione piana in questione, cioè il valore dell'integrale definito (2), è stato definito lo "**slider h**", che può assumere valori nell'intervallo [-6;0], quindi si è inserito nella barra della formula il comando **integrale[f(x),h,0]** . Il valore fornito da GeoGebra è negativo e ciò perché la funzione nell'intervallo considerato è negativa. Il valore positivo dell'area della regione si ottiene prendendo il valore assoluto dell'integrale calcolato.

Aprendo la figura e trascinando lo slider, si possono osservare valori diversi per l'area della regione in esame.

E' opportuno far presente che **impostando l'opzione per la visualizzazione del valore dell'integrale con cinque cifre decimali**, facendo scorrere lo slider fino al valore minimo h=-6, il valore indicato dall'applicazione è -1,49505, molto vicino all'opposto del valore ottenuto con il limite (3).

Q3- Si può riconoscere la proprietà indicata nel quesito osservando che per ogni valore del parametro k il limite per $x \to -\infty$ è finito:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(e^{2x} - (k+2)e^{x} - 2k\right) = -2k,$$

per cui la retta di equazione $y=-2k$ è asintoto orizzontale per il diagramma della funzione.

Q4- La derivata prima della funzione parametrica

$$y = e^{2x} - (k+2)e^{x} - 2k$$

è

$$y' = 2e^{2x} - (k+2)e^{x} = e^{x}(2e^{x} - k - 2)$$

Come si vede,per k>-2, si annulla solo nel punto $x = \log\left(\frac{k+2}{2}\right)$. Notiamo che per $k \leq -2$ la derivata prima non si annulla in alcun punto. Dunque, con la condizione indicata, esiste un solo punto del grafico della funzione a tangente orizzontale .

Classificazione del punto

Poiché per $x < \log\left(\frac{k+2}{2}\right)$ la derivata prima è negativa e per $x > \log\left(\frac{k+2}{2}\right)$ la derivata prima è positiva, si conclude che il punto è di minimo relativo per la funzione ed inoltre, essendo l'unico punto critico, detto **punto è di minimo assoluto.**

Valore del minimo

Il lettore, come utile esercizio, provi che il valore del minimo è

$$f\left(\log\left(\frac{k+2}{2}\right)\right) = -\frac{k^2 + 12k + 4}{4}$$