

Verso l'Esame di stato di Liceo Scientifico

Studio si funzione e integrale generalizzato

In relazione alla funzione $f(x) = x \log^2 x$ affrontare i seguenti quesiti.

1. Dimostrare che è prolungabile per continuità nel punto $x=0$.
2. Studiare il grafico e rappresentarlo avendo cura di determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativi o assoluti ed i punti di flesso.
3. Studiare l'integrale $\int_0^1 x \log^2 x dx$ e nel caso converga precisare cosa rappresenta il suo valore.

Soluzione

1. La funzione è definita nell'intervallo $]0; +\infty[$ ed è continua in ogni punto del suo dominio. Per dimostrare che la funzione è prolungabile per continuità nel punto $x=0$, dove la stessa non è definita, si deve verificare che esista il limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e che sia un valore finito. A quel punto si potrà definire il prolungamento per continuità.

Studio del limite

Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log^2 x$$

si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Lo affrontiamo riconducendolo alla forma ∞/∞ ed applicandolo la regola di De l'Hôpital. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log^2 x}{x^{-1}} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \log x \cdot \frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \log x}{-x^{-2} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \log x}{-x^{-1}} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^{-1}}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0$$

Avendo ottenuto per il limite un valore finito concludiamo che la funzione assegnata è prolungabile per continuità nel punto $x=0$ e la definizione prolungamento è così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0 \\ x \log^2 x & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

2. Studio del grafico.

2.1 La funzione è ora definita nell'intervallo $[0; +\infty[$ ed è continua in ogni punto.

2.2 Segno e zeri.

La funzione si annulla nei due punti $x_1=0$ ed $x_2=1$; per ogni altro punto del dominio assume valori positivi. Già in questa fase possiamo affermare che nei due zeri la funzione assume il suo minimo assoluto.

2.3 Limite per $x \rightarrow +\infty$ ed eventuale asintoto.

Si riconosce immediatamente che $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log^2 x = +\infty$, quindi non esiste asintoto

orizzontale per il diagramma, tuttavia, si ha anche $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log^2 x = +\infty$ e

dunque non esiste neanche asintoto obliquo.

2.4 Monotonia, massimi e minimi relativi.

$$f'(x) = \log^2 x + x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} = \log^2 x + 2 \log x$$

Risulta $f'(x) = 0$ per $(x = e^{-2}) \vee (x = 1)$;

$f'(x) > 0$ per $(0 < x < e^{-2}) \vee (x > 1)$;

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad e^{-2} < x < 1$$

La funzione è strettamente crescente in ciascuno degli intervalli $]0; e^{-2}[$, $]1; +\infty[$, e strettamente decrescente nell'intervallo $]e^{-2}; 1[$. Il Punto $x=e^{-2}$ è di massimo relativo proprio, con

$$Max = f(e^{-2}) = e^{-2} \cdot (\log e^{-2})^2 = 4e^{-2};$$

confermiamo che i punti $x=0$ ed $x=1$ sono di minimo assoluto.

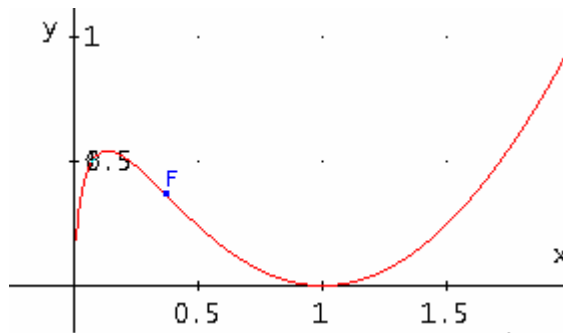
2.5 Concavità e flessi

$$f''(x) = 2 \log x \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} (\log x + 1)$$

Si riconosce che la derivata seconda si annulla solo per $x = e^{-1}$, è negativa per $0 < x < e^{-1}$, dove la curva del diagramma è concava, ed è positiva per $x > e^{-1}$, dove la curva del diagramma è convessa. Il punto $x = e^{-1}$ è di flesso ascendente e risulta $f(e^{-1}) = e^{-1}$.

$$F(e^{-1}; e^{-1})$$

Il diagramma della funzione è riportato a lato.



2.6 Derivabilità nel punto $x=0$ e comportamento del diagramma della funzione per $x \rightarrow 0$. Possiamo ottenere ulteriori informazioni sul comportamento del diagramma della funzione in un intorno destro del punto $x=0$ studiando il limite della funzione derivata prima. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log^2 x + 2 \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x (\log x + 2) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

Dal valore ottenuto si deduce che la funzione nel punto $x=0$ non è derivabile e che il suo diagramma ha nel punto $(0;0)$ come tangente il semiasse positivo delle ordinate.

3. Integrale generalizzato

Si deve studiare il seguente limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x \log^2 x dx$

Calcoliamo prima l'integrale indefinito procedendo con il metodo di integrazione per parti.

$$\begin{aligned} \int x \log^2 x dx &= \frac{x^2}{2} \log^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \log^2 x - \int x \log x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \log^2 x - \left[\frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right] = \frac{x^2}{4} (2 \log^2 x - 2 \log x + 1) + c \end{aligned}$$

Calcoliamo ora il valore dell'integrale definito generalizzato.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x \log^2 x dx &= \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^2}{4} (2 \log^2 x - 2 \log x + 1) \right]_{\varepsilon}^1 &= \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^2}{4} (2 \log^2 \varepsilon - 2 \log \varepsilon + 1) \right] &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Conclusione- L'integrale generalizzato converge ed il suo valore rappresenta l'area della regione del sottografico della curva relativa all'intervallo $[0;1]$.

