Problema

a) Studiare la funzione $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ e tracciare il suo diagramma λ in un riferimento cartesiano ortogonale xOy.

b) Stabilire se relativamente all'intervallo $\left[\frac{1}{4};4\right]$ la funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle ed in caso affermativo determinare il punto (o i punti) previsto nella tesi del teorema.

c) Determinare l'area S(k) della regione piana delimitata dal diagramma della curva, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione r: x = k, con k>0.

d) Studiare il limite $\lim_{k\to+\infty}\frac{S(k)}{S_1(k)}$, essendo $S_1(k)$ l'area del triangolo avente come vertici l'origine O degli assi coordinati ed i punti in cui la retta r incontra l'asse delle ascisse e la curva λ.

Soluzione

a) Dominio e caratteristiche di base

La funzione è algebrica irrazionale fratta, è definita nell'intervallo [0;+∞[ed è continua in ogni punto del dominio.

Segno e zeri

Osserviamo che nel dominio il numeratore della funzione è non negativo e si annulla solo per x=0, il denominatore è strettamente positivo, dunque la funzione ammette come zero x=0 e per ogni altro punto del dominio è positiva.

Limiti ed eventuali asintoti

La frontiera del dominio è l'insieme {0;+∞}. Avendo precisato che la funzione è continua, rimane da studiare il limite per x→+∞.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{+\infty}=0^+$$

Concludiamo che l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per il diagramma della funzione per x→+∞.

Monotonia, derivabilità, massimi e minimi relativi o assoluti

La funzione derivata prima è

$$f'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2},$$

essa esiste per ogni x≠0 del dominio; dunque la funzione è derivabile nell'intervallo aperto]0;+∞[. Si riconosce che

$f'(x)>0$, nell'intervallo]0;1[,

$f'(x)<0$, nell'intervallo]1;+∞[,

$f'(x)=0$, solo per x=1

Concludiamo che la funzione è strettamente crescente nell'intervallo]0;1[, strettamente decrescente nell'intervallo]1;+∞[ed il punto x = 1 è di massimo relativo proprio, nonché assoluto con $M\text{ax}=f(1)=\frac{1}{2}$.

La funzione assume nel punto x = 0 il minimo assoluto e vale zero.

Prima di procedere è bene precisare il comportamento del diagramma della funzione per $x\to0^+$; a tale scopo si studia il limite $x\to0^+$ della derivata prima.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Il valore ottenuto indica che il diagramma della funzione ammette come semitangente destra nel punto x=0 l'asse delle ordinate.

Concavità, convessità e flessi

La funzione derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{3x^2 - 6x - 1}{4x\sqrt{x}(x+1)^3}$$

Trovate le radici dell'equazione di secondo grado $3x^2 - 6x - 1 = 0$, $x = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$, si riconosce che relativamente all'intervallo]0;+∞[risulta:

$f''(x) < 0$, nell'intervallo $\left]0; \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right[$; in questo intervallo la funzione è concava, cioè il suo diagramma volge la concavità verso il basso;

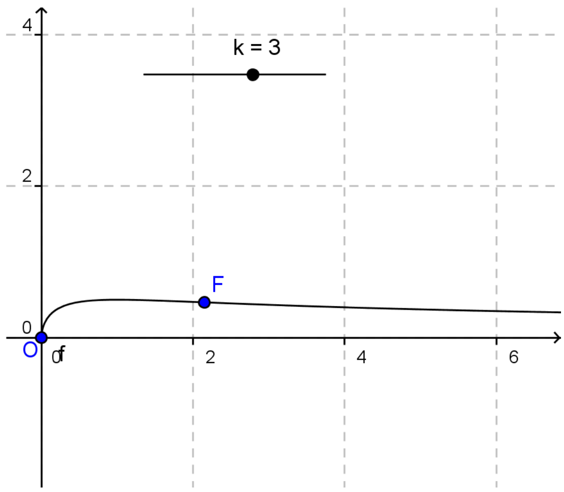
$f''(x) > 0$, nell'intervallo $\left]\frac{3+2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$; in questo intervallo la funzione è convessa, cioè il suo diagramma volge la concavità verso l'alto;

nel punto $x = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ si annulla la derivata seconda e vi è un flesso ascendente.

L'ordinata del punto di flesso è

$$f\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right) \approx 0,465.$$

Il diagramma della funzione è riportato a lato, con l'indicazione del punto F di flesso.



b) Le ipotesi previste nel teorema di Rolle sono che la funzione limitatamente all'intervallo $\left[\frac{1}{4}; 4\right]$ sia continua, che assuma agli estremi dell'intervallo lo stesso valore, che sia derivabile in ogni punto interno all'intervallo. Ebbene, nello sviluppo del precedente punto abbiamo precisato che la funzione è continua in tutto il dominio e che è derivabile per ogni x≠0 (sempre del dominio); si tratta di verificare se agli estremi dell'intervallo la funzione assume lo stesso valore.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}+1} = \frac{2}{5}, \quad f(4) = \frac{2}{5}.$$

Sono soddisfatte tutte le ipotesi richieste nel teorema, dunque esiste almeno un punto interno all'intervallo in esame in cui si annulla la derivata prima. In precedenza abbiamo visto che per x=1 si annulla la derivata prima, questo punto è tra l'altro l'unico punto in cui si annulla la derivata prima e risulta interno all'intervallo $\left[\frac{1}{4};4\right]$; esso è il punto che soddisfa la tesi del teorema di Rolle. C.V.D.

c) Il valore dell'area S(k) della regione piana indicata è il valore del seguente integrale definito
$\int_0^k \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$.
Per il calcolo dell'integrale indefinito associato si deve procedere per sostituzione.
Riportiamo di seguito i calcoli senza ulteriori commenti.

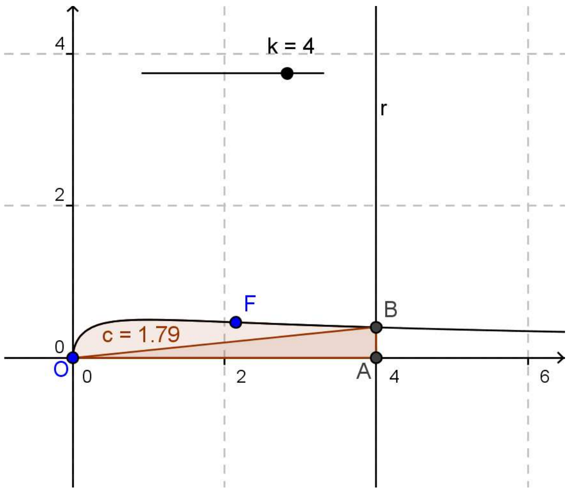
$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$, Ponendo $\sqrt{x}=t \rightarrow x=t^2, dx=2tdt$ e si ha

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = \int \frac{t}{t^2+1}\cdot 2tdt = 2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2\left(t-arctgt\right)+C,$$

essendo C una qualsiasi costante reale.
Ritornando all'integrale definito si ha:

$$\int_0^k \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = 2\left[\sqrt{x}-arctg\sqrt{x}\right]_0^k = 2\left(\sqrt{k}-arctg\sqrt{k}\right)$$

d) Il triangolo indicato nel testo è rettangolo; in figura è il triangolo di vertici O, A, B. La retta x=k, con k>0 determina i punti A(k;0), $B\left(k;\frac{\sqrt{k}}{k+1}\right)$. L'area del triangolo misura:



$$S_1(k) = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AB} = \frac{k\sqrt{k}}{2(k+1)}.$$

Studio del limite

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{S(k)}{S_1(k)} = \lim_{k\to+\infty}\frac{2\left(\sqrt{k}-arctg\sqrt{k}\right)}{\frac{k\sqrt{k}}{2(k+1)}} =$$

$$\lim_{k\to+\infty} 4\left(1-\frac{arctg\sqrt{k}}{\sqrt{k}}\right)\cdot\frac{k+1}{k} = 4\cdot(1-0)\cdot 1 = 4$$

Note per gli utenti di Geogebra

Nel lavoro che si apre con il link Apri il lavoro con GeoGebra si ha la possibilità di trascinare il punto **slider** e visualizzare contemporaneamente il valore dell'integrale definito $\int_0^k \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$ per valori di k appartenenti all'intervallo [0;5]. Nella figura riportata si può leggere il valore c=1,79 corrispondente a k=4. Se si desidera ottenere valori approssimati dell'integrale definito per k>5 sarà sufficiente definire nelle proprietà dello slider l'intervallo di variabilità.