

Verso l'Esame di Stato

Problema¹

Considerata la funzione integrale $G(x) = \int_0^x (e^{2t} - e^t) dt$ risolvere i seguenti quesiti.

- Studiare e rappresentare il diagramma della funzione $G(x)$, determinandone gli eventuali asintoti, i punti di massimo, di minimo, relativi o assoluti, studiare la monotonia, la concavità e gli eventuali punti di flesso. Precisare il codominio della funzione.
- Riconosciuto e che il diagramma presenta un punto F di flesso, scrivere l'equazione della retta tangente alla curva in detto punto e rappresentarla.
- Riconosciuto che la curva ammette un asintoto orizzontale s , sia A il punto in cui la curva taglia detto asintoto. Trovare le coordinate di A.
- Relativamente all'intervallo $]-\infty; x_A]$ il diagramma della curva e l'asintoto orizzontale delimitano una regione S di piano illimitata. Applicando la teoria degli integrali generalizzati stabilire se tale regione ha area finita, determinandone il valore in caso affermativo.

Soluzione

- a) Determiniamo innanzitutto l'espressione analitica della funzione integrale $G(x)$. Si ha

$$G(x) = \int_0^x (e^{2t} - e^t) dt = \left[\frac{1}{2} e^{2t} - e^t \right]_0^x = \left(\frac{1}{2} e^{2x} - e^x \right) - \left(\frac{1}{2} e^0 - e^0 \right) = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + \frac{1}{2} = \frac{(e^x - 1)^2}{2}$$

La funzione è definita su tutto l'asse reale, è continua e derivabile in ogni punto del dominio.

a.1) Segno e zeri

La funzione è non negativa in tutto il dominio e si annulla solo per $x=0$. Già da questi elementi si deduce che la funzione assume nel punto $x=0$ il minimo assoluto che vale zero.

a.2) Limiti ed eventuali asintoti

La frontiera del dominio è $Fr(R) = \{-\infty; +\infty\}$. Si devono studiare i limiti solo per i punti della frontiera.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - 1)^2}{2} = +\infty \Rightarrow$ Non esiste asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$; facciamo vedere che non esiste neanche asintoto obliquo. Infatti, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - 1)^2}{2x} = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^x - 1)^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Per $x \rightarrow -\infty$ la retta di equazione $y = \frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale.

a.3) Monotonia, massimi e minimi.

$$G'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (e^x - 1) e^x = (e^x - 1) e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

La funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $]-\infty; 0[$ e strettamente crescente nell'intervallo $]0; +\infty[$. Il punto $x=0$ è di minimo relativo proprio, ma, essendo l'unico punto critico e la funzione definita in un intervallo, lo stesso punto è anche di minimo assoluto. Abbiamo già precisato che per $x=0$ la funzione si annulla.

La funzione non ha punti di massimo relativo e dal valore del limite per $x \rightarrow +\infty$ si conclude che l'estremo superiore della funzione è $+\infty$.

Il codominio della funzione- Dagli elementi fin qui acquisiti si deduce che il codominio della funzione è $[0; +\infty[$.

¹ Problema assegnato nel compito in classe in 5D-PNI il 28-maggio-2008

a.4) Concavità e flessi.

La derivata seconda della funzione è

$$G''(x) = 2e^{2x} - e^x = e^x(2e^x - 1), \text{ che esiste per ogni punto del dominio.}$$

Si deduce immediatamente che la funzione derivata seconda si annulla solo per

$$x = \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log 2; \text{ inoltre, è negativa per } x < -\log 2 \text{ ed è positiva per } x > -\log 2.$$

Pertanto il punto $x = -\log 2$ è di flesso, precisamente si tratta di un flesso ascendente.

Concludiamo che la funzione è concava per $x < -\log 2$, mentre è convessa per $x > -\log 2$.

Ordinata del punto di flesso.

$$y_F = G(-\log 2) = \frac{1}{2}(e^{-\log 2} - 1)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{1}{8} \rightarrow F\left(-\log 2; \frac{1}{8}\right).$$

b) Equazione della tangente inflessionale

Ricordiamo che l'equazione della retta tangente

al diagramma di una funzione $y=f(x)$ nel punto

$P_0(x_0; f(x_0))$ nell'ipotesi che la funzione sia

derivabile in $x=x_0$, è

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Nel caso specifico l'equazione è

$$t_F: y - G(-\log 2) = G'(-\log 2) \cdot (x + \log 2)$$

Essendo

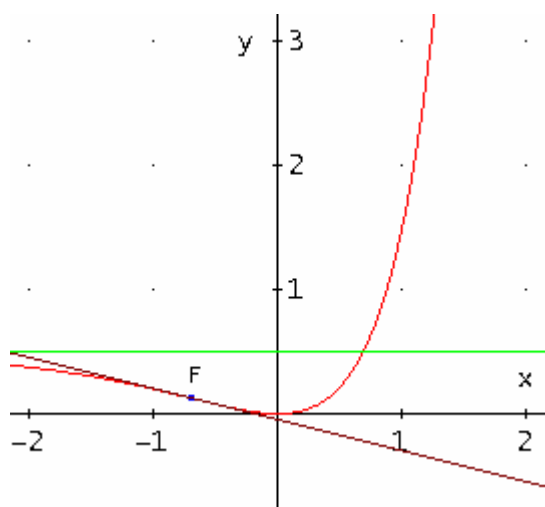
$$G'(-\log 2) = (e^{-\log 2} - 1)e^{-\log 2} =$$

$$\left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \rightarrow$$

$$t_F: y - \frac{1}{8} = -\frac{1}{4} \cdot (x + \log 2) \rightarrow$$

$$t_F: y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\log 2$$

Riportiamo a lato il diagramma della funzione comprensivo della retta tangente inflessionale.



- c) Il punto di intersezione tra la curva e l'asintoto orizzontale si determina risolvendo il sistema composto dall'equazione della retta e dall'equazione della curva. Il punto è

$$A\left(\log 2; \frac{1}{2}\right).$$

- d) Per lo studio dell'integrale richiesto

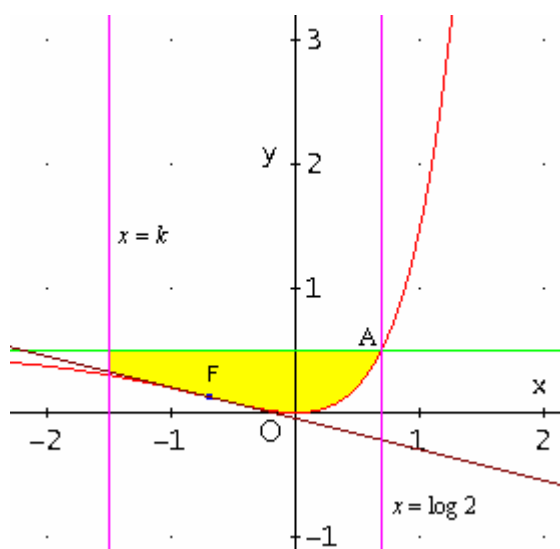
$$\int_{-\infty}^{\log 2} \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \frac{1}{2} \right) \right] dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\log 2} \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + e^x \right) dx$$

si deve studiare il seguente limite

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \int_k^{\log 2} \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + e^x \right) dx$$

e solo se esisterà il valore di questo limite e sarà finito esso rappresenterà l'area della



regione illimitata di piano delimitata dalla curva e dall'asintoto orizzontale così come indicato nel testo.

Calcoliamo l'integrale definito.

$$\int_k^{\log 2} \left(-\frac{1}{2} e^{2x} + e^x \right) dx = \left[-\frac{1}{4} e^{2x} + e^x \right]_k^{\log 2} = 1 - \left(-\frac{1}{4} e^{2k} + e^k \right)$$

Studio del limite

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} 1 - \left(-\frac{1}{4} e^{2k} + e^k \right) = 1 - \left(-\frac{1}{4} \cdot 0 + 0 \right) = 1$$

Conclusione- L'integrale converge e l'area della regione illimitata considerata vale uno.