Funzione logaritmica e calcolo integrale

1) Studiare la funzione $f(x)=\dfrac{\log^2 x}{x}$, precisandone il dominio di definizione, determinando i punti di massimo e di minimo relativo o assoluto, i punti di flesso e rappresentare il diagramma in un riferimento cartesiano ortogonale xOy.
2) Studiare l'integrale definito $\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{\log^2 x}{x}dx$.

Soluzione

1)

a. La funzione è definita nell'intervallo $]0;+\infty[$.

b. Segno e zeri

i. La funzione si annulla solo nel punto x=1.

ii. La funzione è positiva in ogni punto del dominio diverso da x=1.

c. Limiti nei punti di frontiera ed eventuali asintoti per il grafico.

i. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\log^2 x}{x}=\frac{(-\infty)^2}{0^+}=+\infty \rightarrow$

l'asse delle ordinate è asintoto verticale da destra.

ii. Il limite per $x\to+\infty$ si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Si tratta di un limite il cui valore si deduce immediatamente dal confronto dell'infinito al numeratore con quello al denominatore: quello del numeratore non ha ordine ma è inferiore a qualsiasi ordine prestabilito; quello del denominatore è un infinito di ordine uno e dunque il limite vale zero. A beneficio del lettore, riportiamo, comunque, il calcolo del limite applicando la regola di De l'Hôpital (la regola va applicata due volte).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log^2 x}{x}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\log x\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\log x}{x}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{1}=0$$

Dal valore ottenuto per il limite si conclude che l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per il diagramma della funzione per $x\to+\infty$.

d. Monotonia, massimi e minimi relativi o assoluti

i. Avendo riconosciuto che la funzione si annulla per x=1 e che per ogni altro punto del dominio è positiva possiamo affermare intanto che il punto x=1 è di minimo assoluto. Per contro, dallo studio del limite per $x\to 0^+$ si deduce che la funzione non ha massimo e che il suo estremo superiore è $Sup(f)=+\infty$. Poiché la funzione ammette derivata di qualsiasi ordine nel suo dominio, troviamo la derivata prima e studiamone il segno per stabilire se esistono punti di massimo o di minimo relativo.

$$f'(x)=\frac{2\log x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-\log^2 x}{x^2}=\frac{\log x(2-\log x)}{x^2}$$

$f'(x)>0$ se e solo se $1<x<e^2$;

$f'(x)<0$ se e solo se $(0<x<1)\vee(x>e^2)$;

$f'(x)=0$ nei punti $x_1=1,\ x_2=e^2$

Conclusione

La funzione è strettamente crescente nell'intervallo $]1;e^2[$; è strettamente decrescente in ciascun punto dell'insieme $]0;1[\cup]e^2;+\infty[$.

Il punto $x_1=1$ è di minimo relativo, nonché assoluto (come già precisato); il punto $x_2=e^2$ è di massimo relativo.

Valore del massimo relativo:

$$f\left(e^2\right)=\frac{\left(\log e^2\right)^2}{e^2}=\frac{\left(2\log e\right)^2}{e^2}=\frac{4}{e^2}\simeq 0,541$$

e. Concavità, convessità e flessi

La derivata seconda è $f''(x)=\dfrac{2x\left(\log^2 x-3\log x+1\right)}{x^4}$

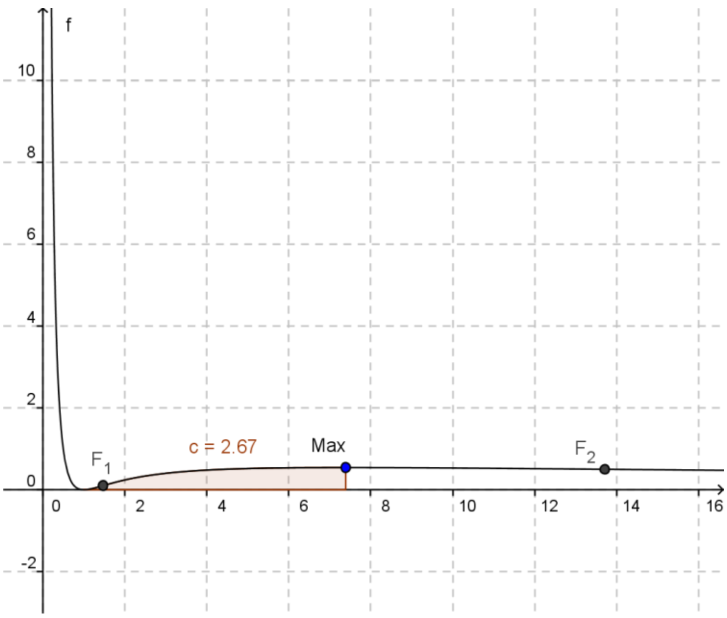
Poiché $\log^2 x-3\log x+1=0$ se $\left(\log x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\vee\left(\log x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$, cioè se $\left(x=e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)\vee\left(x=e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)$, dalle proprietà della funzione logaritmica si deduce che

$f''(x)>0$ nell'insieme $B=\left]0;e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right[\cup\left]e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}};+\infty\right[$,

in cui la funzione è convessa (la concavità è rivolta verso l'alto), mentre

$f''(x)<0$ nell'intervallo $C=\left]e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}};e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right[$, in cui la funzione è concava.

I punti $x_3=e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$, $x_4=e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, sono ascisse di punti di flesso per il diagramma della funzione.



2) L'integrale definito si calcola immediatamente. Infatti:

$$\int_1^{e^2}\frac{\log^2 x}{x}dx=$$

$$\int_1^{e^2}(\log x)^2 D(\log x)\,dx=$$

$$\left[\frac{(\log x)^3}{3}\right]_1^{e^2}=\frac{\left(\log e^2\right)^3}{3}=\frac{8}{3}$$