

Verso l'Esame di Stato nel Liceo Scientifico

Problema

Considerata la funzione di espressione analitica

$$f(x) = \frac{e^x}{x+k}$$

determinare per quale valore della costante k la funzione ha derivata prima nulla nel punto $x=-1$. Per il valore trovato si determini il dominio della funzione, studiare i limiti nei punti di frontiera, determinare gli eventuali asintoti, studiare la monotonia e gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo. Studiare la concavità e rappresentare il diagramma della funzione.

Soluzione

La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = \frac{e^x(x+k) - e^x}{(x+k)^2} = \frac{e^x(x+k-1)}{(x+k)^2}$$

Calcolando la derivata prima nel punto $x=-1$ e annullandola si ha $f'(-1) = \frac{e^{-1}(k-2)}{(-1+k)^2} = 0$ da cui si

deduce che deve essere $k=2$. La funzione ha dunque forma analitica $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

Dominio e frontiera

La funzione ottenuta è definita nell'insieme $A = \mathbb{R} - \{-2\}$; la frontiera è $Fr(A) = \{-\infty; -2; +\infty\}$.

Limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+2} = 0$$

L'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$; mentre si riconosce facilmente che per $x \rightarrow +\infty$ non esiste alcun tipo di asintoto. Infatti risulta anche $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Ancora si ha

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{e^x}{x+2} = \frac{e^2}{0^-} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{e^x}{x+2} = \frac{e^2}{0^+} = +\infty$$

per cui la retta di equazione $x=2$ è asintoto verticale a destra e a sinistra.

Monotonia, massimi e minimi relativi.

L'espressione della derivata prima è

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$$

La funzione è strettamente crescente per $x > 1$, strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli

$]-\infty; -2[$; $]-2; -1[$. Il punto $x=-1$ è di minimo relativo proprio.

La derivata seconda è:

$$f''(x) = \frac{e^x(x^2 + 2x + 2)}{(x+2)^3}$$

Si riconosce che è negativa per $x < -2$, positiva

per $x > -2$. La concavità della curva è rivolta verso il basso per $x < -2$, verso l'alto per $x > -2$. Non vi sono flessi. Il diagramma della funzione è riportato a margine.

