

Verso l'Esame di Stato nel Liceo Scientifico

Problema

Considerata la funzione di espressione analitica

$$f(x) = \frac{k \log x + h}{x - h}$$

determinare le costanti k, h in modo che il diagramma della funzione passi dal punto $A(1;1)$ ed abbia ivi la retta tangente parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Della funzione determinata trovare il dominio, studiare i limiti nei punti di frontiera e determinare gli eventuali asintoti.

Soluzione

Imponendo il passaggio della curva della funzione dal punto $A(1;1)$ si ricava l'equazione

$$\frac{h}{1-h} = 1 \rightarrow h = \frac{1}{2}$$

L'espressione analitica della funzione è dunque della forma seguente

$$f(x) = \frac{2k \log x + 1}{2x - 1}$$

Determiniamo ora la derivata prima ed imponiamo la condizione $f'(1) = -1$. Si ha

$$f'(x) = \frac{\frac{2k}{x}(2x-1) - 2(2k \log x + 1)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(1) = 2k - 2 = -1 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

La forma analitica della funzione è

$$f(x) = \frac{\log x + 1}{2x - 1}$$

Dominio e frontiera

La funzione ottenuta è definita nell'insieme $A = \left] 0; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$. La frontiera è

$$Fr(A) = \left\{ 0; \frac{1}{2}; +\infty \right\}.$$

Limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x + 1}{2x - 1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{\log x + 1}{2x - 1} =$$

$$\frac{1 - \log 2}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{\log x + 1}{2x - 1} = \frac{1 - \log 2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + 1}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2} = 0$$

Conclusioni

Il grafico della funzione ammette l'asse delle ordinate come asintoto verticale a destra, la retta di equazione $x = 1/2$ come asintoto verticale a destra e a sinistra, l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$. L'equazione della retta tangente nel punto $A(1;1)$ è $t: y = -x + 2$.

