Studio di funzione

[1]**Es_6** Considerata la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-x}{2x+1}$, determinare il dominio di definizione, studiare il segno, i valori dei limiti nei punti estremi del dominio, stabilire se il suo diagramma ammette asintoti ed in caso affermativo trovarli, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo o assoluto. Rappresentare nel piano cartesiano il diagramma della funzione, eventualmente dopo aver determinato ulteriori punti utili del grafico.

Soluzione

a) Dominio: $A=R-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

b) La funzione si annulla nei punti x_1=0, x_2=1, è positiva in $\left]-\dfrac{1}{2};0\right[\cup\,1;+\infty$, è negativa negli altri punti del dominio.

c) Limiti ed eventuali asintoti

a. $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}\dfrac{x^2-x}{2x+1}=\dfrac{\frac{3}{4}}{0^-}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}\dfrac{x^2-x}{2x+1}=\dfrac{\frac{3}{4}}{0^+}=+\infty$; la retta $x=-\dfrac{1}{2}$ è asintoto verticale per il diagramma della funzione sia da destra che da sinistra.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x}{2x+1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x}{x\;\,2x+1}=\dfrac{1}{2}=m$;

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-mx \;=\; \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{2\;\,2x+1}=-\frac{3}{4}=q$$

La retta $s:y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$ è asintoto obliquo per il diagramma della funzione per $x\to+\infty$. Eseguendo analoghi calcoli si conclude che la stessa retta è anche asintoto obliquo per $x\to-\infty$.

La funzione non è limitata né superiormente, né inferiormente: Sup(f)=+∞, Inf(f)=-∞

d) Monotonia, massimi e minimi relativi.

La funzione derivata prima è $f\,'(x)=\dfrac{2x^2+2x-1}{2x+1^{\;2}}$

$$f\,'(x)=0,\ \text{per}\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2};$$

$$f\,'(x)>0\ \text{per}\ \left(x<-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\vee\left(x>\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right);$$

$$f\,'(x)<0\ \text{per}\ \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}<x<-\frac{1}{2}\right)\vee\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$x=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ è punto di massimo relativo proprio; $f\left(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1$;

[1] Esercizio assegnato nel compito in classe M5-5I-21-03-11

$x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ è punto di minimo relativo proprio; $f\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1$