

Verso l'Esame di Stato nel Liceo Scientifico

Problema

Risolvere i quesiti che seguono relativamente alla funzione $f(x) = x^2 \cdot \log(1+x)$.

- Scrivere il polinomio di Taylor del terzo ordine, di punto iniziale $x=0$.
- Scrivere la formula di Taylor di ordine tre con il resto di Peano di punto iniziale $x=0$ e dimostrare che il resto è un infinitesimo di ordine superiore a tre per $x \rightarrow 0$.

Soluzione

- a) La funzione in esame è trascendente logaritmica ed è definita nell'intervallo aperto $A)]-1; +\infty[$. La funzione ammette derivata di qualsiasi ordine in ogni punto del dominio, quindi esistono i polinomi di Taylor di qualsiasi ordine per ogni punto del dominio. Ricordiamo che il polinomio di Taylor di punto iniziale x_0 di ordine n per la funzione $f(x)$ è così definito:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (1)$$

Per la funzione in esame risulta $x_0=0$ ed $n=3$. Occorre dunque determinare $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$. Si ha:

$$f(0) = 0.$$

L'espressione della funzione derivata prima è:

$$f'(x) = 2x \log(1+x) + \frac{x^2}{1+x} \quad \rightarrow \quad f'(0) = 0;$$

l'espressione della funzione derivata seconda è:

$$f''(x) = 2 \log(1+x) + \frac{2x}{1+x} + \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2} \quad \rightarrow \quad f''(0) = 0;$$

l'espressione della funzione derivata terza è:

$$f'''(x) = \frac{2}{1+x} + \frac{2}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^3} \quad \rightarrow \quad f'''(0) = 6$$

Il polinomio di Taylor del terzo ordine richiesto è dunque

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = \frac{6}{3!}x^3 = x^3 \quad (2)$$

- b) La formula di Taylor di punto iniziale $x=0$ di ordine tre con il resto di Peano è la seguente

$$f(x) = P_3(x) + x^3 \cdot \omega(x), \quad (3)$$

nella quale $P_3(x)$ è il polinomio di Taylor espresso dalla (2) ed il termine complementare $x^3 \cdot \omega(x)$ rappresenta il resto di Peano. Occorre dimostrare che il resto è un infinitesimo di ordine superiore a tre per $x \rightarrow 0$. Per provare la tesi occorre dimostrare che risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot \omega(x)}{x^3} = 0. \quad (4)$$

Ebbene, dalla (3) si deduce che

$$x^3 \cdot \omega(x) = f(x) - P_3(x) = x^2 \log(1+x) - x^3$$

e dunque per il limite (4) si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot \omega(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \log(1+x) - x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x}$$

Il limite ottenuto si presenta nella forma indeterminata $0/0$, ma, scomponendolo nella somma di due limiti,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x}$$

si riconosce che esistono i singoli limiti ed i loro valori sono finiti, dunque, per il teorema sul limite della somma, esiste anche il limite di riferimento ed il suo valore è uguale alla somma dei due limiti suddetti. Per i due limiti indicati si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x} = 1 - 1 = 0$$

Perciò la tesi è acquisita.

Approfondimento

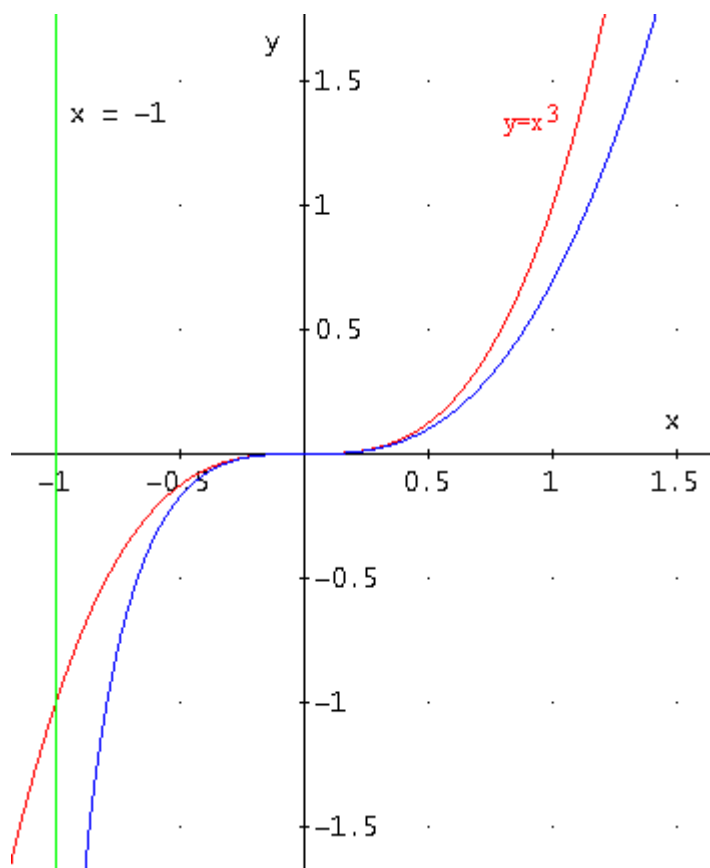
A beneficio del lettore, riportiamo in un intorno del punto $x=0$, nello stesso riferimento cartesiano, i diagrammi della funzione

$f(x) = x^2 \log(1+x)$ e della

funzione $g(x) = P_3(x)$. Il

diagramma di $f(x)$ è in colore **blu** e quello di $g(x)$ è in colore rosso. I diagrammi evidenziano come per punti abbastanza vicini allo zero i punti delle due curve si discostano poco.

Quantitativamente, limitatamente ad alcuni valori della variabile dell'intervallo $[-0,5; 0,5]$, si possono riscontrare le differenze tra $f(x)$ e $P_3(x)$ nella tabella riportata sotto. Le elaborazioni riportate sono state ottenute con il foglio elettronico Excel.



x	$f(x)=x^2 \log(1+x)$	$P_3(x)=x^3$	$f(x)-P_3(x)$
-0,500	-0,173286795	-0,125	-0,048286795
-0,400	-0,0817321	-0,064	-0,0177321
-0,300	-0,032100745	-0,027	-0,005100745
-0,200	-0,008925742	-0,008	-0,000925742
-0,100	-0,001053605	-0,001	-5,36052E-05
-0,075	-0,000438534	-0,00042188	-1,66587E-05
-0,050	-0,000128233	-0,000125	-3,23324E-06
-0,025	-1,58236E-05	-1,5625E-05	-1,9863E-07
0,000	0	0	0
0,025	1,54329E-05	0,000015625	-1,92117E-07
0,050	0,000121975	0,000125	-3,02459E-06
0,075	0,000406804	0,000421875	-1,50713E-05
0,100	0,000953102	0,001	-4,68982E-05
0,200	0,007292862	0,008	-0,000707138
0,300	0,023612784	0,027	-0,003387216
0,400	0,053835558	0,064	-0,010164442
0,500	0,101366277	0,125	-0,023633723