

Verso l'Esame di Stato nel Liceo Scientifico

Problema

Studiare la derivabilità della funzione $f(x) = x\sqrt[3]{x^2 + x}$ nel dominio di definizione.

Soluzione

La funzione è algebrica irrazionale intera. Poiché il radicale ha indice dispari la funzione è definita su tutto l'asse reale. Determiniamo la funzione derivata prima per osservarne la forma analitica e trovare il dominio.

Scrivendo la funzione nella forma seguente

$$f(x) = x\sqrt[3]{x^2 + x} = x(x^2 + x)^{\frac{1}{3}}$$

ed eseguendo la derivata applicando la regola del prodotto si ottiene

$$f'(x) = 1 \cdot (x^2 + x)^{\frac{1}{3}} + x \cdot \frac{1}{3} (x^2 + x)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (2x+1) \rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{x^2 + x} + \frac{x(2x+1)}{\sqrt[3]{(x^2 + x)^2}} \quad (1)$$

Dalla forma ottenuta sembrerebbe che la funzione in esame non sia derivabile nei punti $x=0$ ed $x=-1$ perché in essi si annulla il denominatore della frazione che compare nell'espressione della funzione derivata prima, mentre è derivabile in ogni altro punto reale. Osserviamo che per $x=0$ si annulla anche il numeratore della suddetta frazione.

Faremo vedere che la funzione nel punto $x=0$ è derivabile, mentre non lo è nel punto $x=-1$.

Possiamo provare la derivabilità nel punto $x=0$ in due modi diversi.

Primo metodo

Applicando la definizione di derivata prima in un punto come limite del rapporto incrementale si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt[3]{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2 + x} = 0,$$

ed avendo ottenuto un valore finito per il limite si conclude che la funzione è derivabile nel punto in esame e risulta $f'(0) = 0$.

Secondo metodo

Prima di calcolare la derivata prima si può scrivere la funzione in esame nella seguente forma

$$f(x) = x(x^2 + x)^{\frac{1}{3}} = x \cdot x^{\frac{1}{3}} (x+1)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}} (x+1)^{\frac{1}{3}}$$

e calcolare la derivata prima applicando la regola del prodotto. Si ha:

$$f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} (x+1)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{3} (x+1)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x^2 + x} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \quad (2)$$

Dalla forma ottenuta si evince chiaramente che la funzione derivata prima esiste anche per $x=0$ e risulta $f'(0) = 0$, come già visto per altra via.

Studio della derivabilità nel punto $x=-1$

Facendo riferimento alla forma (2) della funzione derivata prima, si osserva che nel punto $x=-1$ la stessa non è definita e studiando il limite per $x \rightarrow -1$ risulta

$$\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4}{3} \sqrt[3]{x^2 + x} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} = 0 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Dunque la funzione in esame non è derivabile nel punto $x=-1$.

Conclusione- La funzione assegnata è derivabile in ogni punto reale diverso da -1.

Osservazione

Per studiare la derivabilità nel punto $x=-1$ si può anche procedere con lo studio del limite del rapporto incrementale. Il lavoro necessario è agevole. Riportiamo le elaborazioni senza ulteriori commenti.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x\sqrt[3]{x^2 + x}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{\frac{4}{3}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{CVD.}$$

Approfondimento

Riportiamo a margine il diagramma della funzione che abbiamo ottenuto con l'applicazione Derive. Vogliamo precisare che Derive non riconosce per la funzione come parte del dominio l'intervallo aperto $]-1;0[$. Ci si chiederà: **come si è operato per avere la rappresentazione della funzione anche nell'intervallo $]-1;0[$?** Abbiamo fatto rappresentare a Derive la funzione

$$g(x) = -x \cdot |x^2 + x|^{\frac{1}{3}}, \text{ limitatamente}$$

all'intervallo indicato, dopo aver definito il seguente vettore di dimensione 2:

$$[x, x \cdot (-\text{ABS}(x^2 + x)^{(1/3)})]$$

Da ultimo, facciamo notare che nel punto $x=-1$ il diagramma della curva presenta come tangente la retta $x=-1$. Si tratta di un punto di flesso a tangente verticale.

