

Cubica e circonferenze

- Considerata la cubica γ di equazione $y = (x-1)^3 - 3(x-1)^2$, rappresentarla nel riferimento cartesiano, dopo aver studiato il segno, determinato i punti di massimo e di minimo relativo, la concavità, la convessità ed il punto di flesso F.
- Scrivere le equazioni delle circonferenze aventi i centri sulla cubica γ e tangenti ad essa nel punto di flesso F.

Soluzione

- Dominio** -La funzione $f(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2$ è definita su tutto l'asse reale, è continua ed ammette derivate di qualsiasi ordine.

Segno e zeri. - Ponendo l'espressione nella forma $f(x) = (x-1)^2(x-4)$, si riconosce immediatamente che la funzione è positiva per $x > 4$, si annulla nei due punti $x=1$, $x=4$, ed è negativa per ogni altro valore della variabile.

Monotonia, massimi e minimi relativi

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0, \text{ per } (x=1) \vee (x=3); f'(x) > 0, \forall x \in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[;$$

$$f'(x) < 0, \forall x \in]1; 3[.$$

La funzione è strettamente crescente in ciascuno degli intervalli $]-\infty; 1[$, $]3; +\infty[$; è strettamente decrescente nell'intervallo $]1; 3[$. Il punto $x=1$ è di massimo relativo proprio, con $f(1)=0$; il punto $x=3$ è di minimo relativo proprio, con $f(3)=-4$.

Aggiungiamo che la funzione non è limitata né inferiormente, né superiormente: $\inf(f) = -\infty$, $\sup(f) = +\infty$.

Concavità, convessità e flessi

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0, \text{ per } x = 2;$$

$$f''(x) > 0, \forall x > 2.$$

La funzione è convessa nell'intervallo $]2; +\infty[$, è concava nell'intervallo $]-\infty; 2[$; il punto $x=2$ è di flesso (ascendente) a tangente obliqua. Risulta $f(2) = -2$, per cui il punto del diagramma in cui la curva cambia concavità è $F(2; -2)$.

- Le circonferenze in questione, dovendo essere tangenti alla curva γ nel punto di flesso F, avranno come tangente in F la retta tangente a γ nello stesso punto ed il centro sulla normale n alla curva, sempre in F.

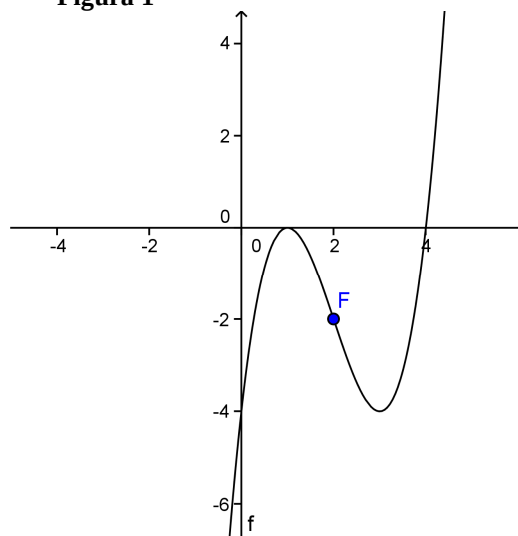
L'equazione della tangente al grafico della funzione in F è

$$t: y - f(x_F) = f'(x_F) \cdot (x - x_F) \rightarrow t: y + 2 = -3 \cdot (x - 2) \rightarrow t: y = -3x + 4$$

L'equazione della normale n in F è

$$n: y - f(x_F) = -\frac{1}{f'(x_F)} \cdot (x - x_F) \rightarrow n: y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$$

Figura 1



Ora si deve risolvere il sistema formato dall'equazione della normale n e dall'equazione della curva γ per trovare i punti di intersezione. Si tenga conto che l'equazione risolvente di terzo grado è soddisfatta da $x=2$, ascissa del flesso.

$$\begin{cases} n: y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} \\ \gamma: y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \end{cases} \rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} \rightarrow 3x^3 - 18x^2 + 26x - 4 = 0$$

Poiché $x=2$ è soluzione dell'equazione si esegue la divisione $(3x^3 - 18x^2 + 26x - 4) : (x - 2)$ per abbassare di grado l'equazione. Si ha

$$3x^3 - 18x^2 + 26x - 4 = (x - 2)(3x^2 - 12x + 2)$$

Si risolve ora l'equazione di secondo grado $3x^2 - 12x + 2 = 0$ le cui radici sono

$$x_2^1 = \frac{6 \pm \sqrt{30}}{3}.$$

I centri delle circonferenze in oggetto hanno dunque come ascisse i valori delle radici appena trovate; sostituendo ordinatamente questi valori nell'equazione della normale n si ricavano i valori delle rispettive ordinate. Indicando detti centri con C_1, C_2 risulta:

$$C_1 \left(\frac{6 + \sqrt{30}}{3}; \frac{\sqrt{30} - 18}{9} \right), \quad C_2 \left(\frac{6 - \sqrt{30}}{3}; -\frac{\sqrt{30} + 18}{9} \right).$$

Ricerca delle equazioni delle due circonferenze

Ciascuna delle due circonferenze passa per il punto di flesso F della cubica e dunque possiamo determinare i rispettivi raggi; ciò fatto le equazioni delle due circonferenze saranno

$$(x - x_{C_1})^2 + (y - y_{C_1})^2 = \overline{C_1 F}^2,$$

$$(x - x_{C_2})^2 + (y - y_{C_2})^2 = \overline{C_2 F}^2.$$

Eseguendo i calcoli si ricava

$$\text{che } \overline{C_1 F}^2 = \overline{C_2 F}^2 = \frac{100}{27}.$$

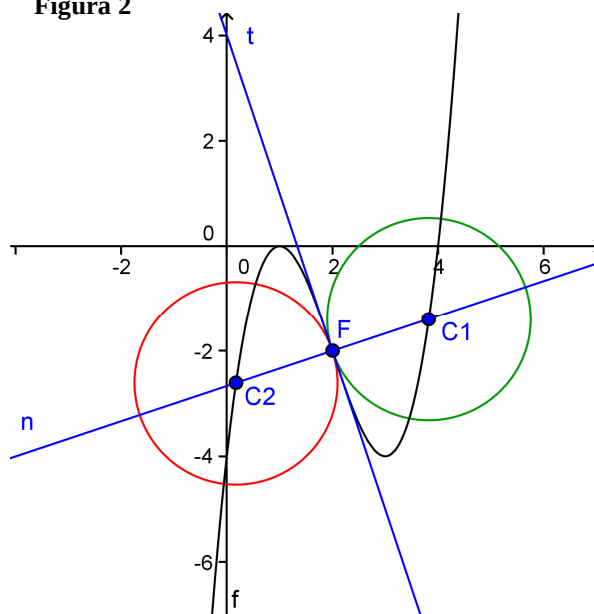
Le equazioni richieste sono

$$\left(x - \frac{6 + \sqrt{30}}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{30} - 18}{9} \right)^2 = \frac{100}{27},$$

$$\left(x - \frac{6 - \sqrt{30}}{3} \right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{30} + 18}{9} \right)^2 = \frac{100}{27}.$$

La figura completa è riportata in Figura 2.

Figura 2



Comandi in GeoGebra

Per ottenere la funzione derivata prima di $f(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2$

Derivata[f(x)] → $g(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Per ottenere l'equazione della tangente alla curva nel punto di flesso $F(2; -2)$

$$y - f(2) = g(2) \cdot (x - 2)$$

Per ottenere l'equazione della normale alla curva nel punto di flesso

$$y - f(2) = -1/g(2) \cdot (x - 2)$$