Esercitazione su una funzione esponenziale

(Applicazione delle disequazioni esponenziali e del concetto di monotonia)

Considerata la funzione esponenziale $f\left(x\right)=h\cdot 2^{x}-3\cdot 4^{-x}$, con h parametro reale, risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Determinare il valore del parametro h per il quale risulta $f\left(1\right)=1$.

Q2- Per il valore di h determinato nel quesito Q1 determinare gli zeri della funzione corrispondente.

Q3-Determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione $f\left(x\right)\geq 1$.

Q4- Riconoscere che la funzione f è strettamente crescente.

Soluzione

Q1- Poiché $f\left(1\right)=2h-\frac{3}{4}$, il parametro h deve verificare l'equazione

$2h-\frac{3}{4}=1$, dalla quale si ricava $h=\frac{7}{8}$. La funzione è dunque

$$f\left(x\right)=\frac{7}{8}\cdot 2^{x}-3\cdot 4^{-x}=7\cdot 2^{x-3}-3\cdot 4^{-x}$$

Q2- Gli zeri della funzione si determinano risolvendo l'equazione $f(x)=0$, perciò:

$\frac{7}{8}\cdot 2^{x}-3\cdot 2^{-2x}=0$, da cui $\frac{7}{8}\cdot 2^{x}-\frac{3}{2^{2x}}=0$, quindi $2^{3x}=\frac{24}{7}$, da cui si ottiene

$$x=\frac{1}{3}\log_{2}\left(\frac{24}{7}\right)\simeq 0,5925...$$

Q3- La disequazione da risolvere è

$$7\cdot 2^{x-3}-3\cdot 4^{-x}\geq 1 \qquad (1)$$

L'espressione può essere elaborata riconducendola ad una forma in cui compaiono solo potenze di 2^{x}.

$\frac{7}{8}\cdot 2^{x}-3\cdot 4^{-x}\geq 1$ diventa $\frac{7}{8}\cdot 2^{x}-3\cdot\frac{1}{2^{2x}}-1\geq 0$, che può essere scritta come

$\frac{7}{8}\cdot 2^{3x}-2^{2x}-3\geq 0$ ed ancora nella forma $7\cdot\left(2^{x}\right)^{3}-8\cdot\left(2^{x}\right)^{2}-24\geq 0$.

Ponendo $2^{x}=t$ si perviene alla disequazione

$$7\cdot t^3-8\cdot t^2-24\geq 0. \qquad (2)$$

Ricordiamo che $f(1)=1$, quindi con $x=1$ nella disuguaglianza (1) si verifica l'uguaglianza e ciò implica che nella (2) si verifica l'uguaglianza con $t=2^1=2$, cioè il polinomio $P(t)=7\cdot t^3-8\cdot t^2-24$ ammette come zero $t=2$ e dunque la divisione $P(t):(t-2)$ è esatta. Questa osservazione ci suggerisce che possiamo scomporre in fattori il polinomio $P(t)$ facendo evidenziando il fattore $(t-2)$. Eseguendo la divisione suddetta si ricava

$$P(t):(t-2)=7t^2+6t+12$$

La disequazione (2) può assumere la seguente forma:

$$(t-2)\left(7t^2+6t+12\right)\geq 0 \qquad (2.1)$$

A questo punto ricordiamo che essendo $t=2^x$, per ogni x reale risulta t>0 e quindi la somma $7t^2+6t+12$ è strettamente positiva. Ciò permette di affermare che l'insieme dei valori di t che verificano la (2.1) sono quelli per i quali risulta $t-2\geq0$, quindi i valori $t\geq2$.

***

Osservazione

La proprietà $7t^2+6t+12>0$ sussiste per ogni t reale e ciò si può riconoscere osservando che il trinomio di secondo grado $7t^2+6t+12$ ha il discriminante negativo. Infatti:

$\frac{\Delta}{4}=3^2-7\cdot12=-75<0$ e ciò [1] implica che $7t^2+6t+12>0$ per ogni valore reale di t.

***

Ritornando alla disequazione (1) possiamo affermare che l'insieme delle soluzioni coincide con l'insieme $S=\left\{x\in R \middle| 2^x\geq 2\right\}=[1;+\infty[$.

Q4- La funzione esponenziale in oggetto è definita su tutto l'asse reale e per dimostrare che è strettamente crescente occorre provare che:

per ogni x reale e per ogni $k>0$ risulta $f(x)<f(x+k)$.

Ebbene, la disuguaglianza da provare è

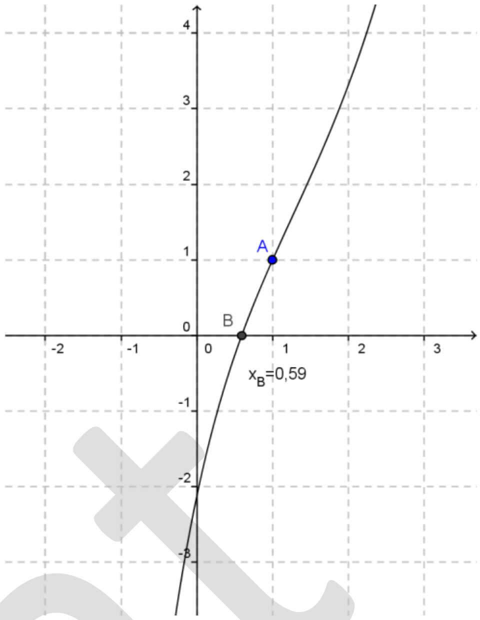
$$\frac{7}{8}\cdot2^x-3\cdot4^{-x}<\frac{7}{8}\cdot2^{x+k}-3\cdot4^{-(x+k)} \qquad (3)$$

Scriviamo la disuguaglianza diversamente.

[1] Dalla teoria delle disequazioni di secondo grado è noto che la disequazione $ax^2+bx+c>0$ con $a>0$ e $\Delta=b^2-4ac<0$ è soddisfatta da ogni valore reale della variabile x.

$\frac{7}{8}\cdot 2^{x} - \frac{7}{8}\cdot 2^{x+k} < 3\cdot 4^{-x} - 3\cdot 4^{-(x+k)}$, e ancora,

$$\frac{7}{8}\cdot 2^{x}\left(1-2^{k}\right) < 3\cdot 4^{-x}\left(1-4^{-k}\right) \qquad (3.1)$$



Osserviamo ora che con $k>0$ risulta $2^{k}>1$ e quindi il primo membro della (3.1) è negativo per ogni x reale; inoltre, sempre con $k>0$, si ha anche $4^{-k}<1$ e quindi $1-4^{-k}>0$, dunque il secondo membro della (3.1) è positivo per ogni x reale, pertanto la (3.1) è soddisfatta effettivamente per ogni x reale e per ogni $k>0$. C.V.D.

A beneficio del lettore riportiamo a margine la rappresentazione del diagramma della funzione $y=f(x)$ analizzata. In figura sono evidenziati il punto A $(1; f(1))$ ed il punto B in cui il diagramma taglia l'asse delle ascisse.