Dal Grafico alla funzione

Andamento dell'estensione della superficie polare artica ghiacciata

Problema(1)

Secondo alcuni ricercatori la superficie della zona polare artica del nostro Pianeta coperta da ghiacci nel corso dell'anno ha un andamento descritto dalla funzione goniometrica $f(t)=A\cos(kt+\varphi)+B$ la cui parziale rappresentazione grafica è riportata in **Figura 1**, con la variabile t espressa in giorni.

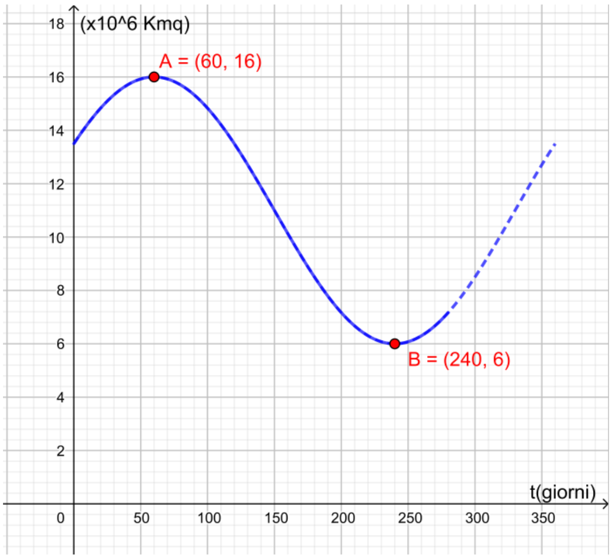

Figura 1

1. Assumendo che il numero di giorni in un anno sia 360, determinare i valori delle costanti A, k, φ, B, sapendo che $f(60)=16\cdot 10^6$ Km^2 e $f(240)= 6\cdot 10^6$ Km^2 .
2. Determinare in quali giorni dell'anno risulta $f(t)=13{,}5\cdot 10^6$ Km^2 .
3. Determinare in quali fasi dell'anno è soddisfatta la doppia disuguaglianza $8{,}5\cdot 10^6 Km^2 \leq f(t) \leq 13{,}5\cdot 10^6$ Km^2.

Risoluzione

1. Osserviamo subito che la funzione *f*(*t*) rappresentativa dell'estensione della superficie dei ghiacci nel testo del problema si precisa che è da riferire ad un anno(2). Con l'assunto di considerare un anno pari a 360 giorni possiamo affermare quanto segue.
    a. Relativamente alla costante k, poiché la funzione cosinusoidale $\cos(kt+\varphi)$ ha periodo $2\pi/k$, si deduce che deve valere l'uguaglianza $2\pi/k =360g$, da cui si ha: $k= \pi/(180g)$.
    b. La funzione goniometrica estesa su tutto l'asse reale, oltreché periodica, è continua e il suo codominio è limitato. L'**ampiezza A dell'oscillazione della funzione** si deduce dalle

---

(1) Il testo di questo problema è una mia rielaborazione del problema riportato come n.99 a pag.868, sul Volume 4 Matematica.blu 2.0 - Seconda Ediz. Zanichelli, Autori M. Bergamini, G.Barozzi, A.Trifone e proposto come attività di esercitazione da sviluppare da parte del lettore. Per completezza di informazione di seguito riporto il testo presente sul volume indicato, rimanendo agli Autori l'esclusiva proprietà intellettuale. Si chiarisce, infine, che Il grafico cui fa riferimento il testo del problema è equivalente come contenuti di informazioni a quello riportato nella mia rielaborazione.
" ***Ghiacci polari***- *Anna e Claudio sono appassionati di matematica ed ecologia. Provano a studiare l'andamento dell'estensione dei ghiacci artici con un modello semplificato. In figura è rappresentato il grafico della funzione che secondo il modello fornisce l'estensione dei ghiacci a partire dal primo gennaio. Per maggior praticità la durata dell'anno solare è arrotondata a 360 giorni.*

a) Determina l'espressione analitica della funzione che è del tipo $f(t)=A\cos(kt+\varphi)+B$

b) In base al modello determina i giorni dell'anno in cui l'estensione dei ghiacci è $13{,}5\cdot 10^6$ Km^2 .

c) Individua i giorni dell'anno in cui l'estensione dei ghiacci polari è compresa tra $13{,}5\cdot 10^6$ Km^2 e $8{,}5\cdot 10^6 Km^2$."

(2) Ai fini della trattazione più generale dal punto di vista matematico del problema di seguito riteniamo che il modello matematico proposto si ripeta negli anni successivi e che dunque la funzione sia periodica.

informazioni contenute nel diagramma riportato in figura. Infatti, la differenza tra il valore massimo ed il valore minimo è pari al doppio dell'ampiezza: Max-min=2A. Inoltre, poiché la funzione assume il suo massimo nel 60° giorno ed il valore è $16\cdot10^6$ Km^2, il minimo è assunto 240° giorno ed il valore è $6\cdot10^6$ Km^2, sussiste l'uguaglianza

$2A=(16\cdot10^6-6\cdot10^6)Km^2$, da cui $A=5\cdot10^6 Km^2$.

c. A questo punto possiamo affermare che l'espressione della funzione è del tipo $f(t)=5\cdot10^6\left(Km^2\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{180}t+\varphi\right)+B$. Per determinare le altre due costanti imponiamo le condizioni che la funzione assuma il **massimo** e il **minimo** rispettivamente nel 60° e nel 240° giorno dell'anno, con i rispettivi valori indicati: f(60g)= $16\cdot10^6$ Km^2, f(240g)= $6\cdot10^6$ Km^2. **Si ricava il seguente sistema di equazioni**

$$\begin{cases} f(60)=5\cdot10^6\left(Km^2\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{180}\cdot60+\varphi\right)+B=16\cdot10^6\left(Km^2\right) \\ f(240)=5\cdot10^6\left(Km^2\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{180}\cdot240+\varphi\right)+B=6\cdot10^6\left(Km^2\right) \end{cases},$$

da cui , sottraendo membro a membro le due equazioni si perviene all'equazione

$5\cdot10^6\left(Km^2\right)\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)-\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)\right]=(16-6)\cdot10^6\left(Km^2\right)$ e successivamente all'equazione $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)-\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=2$.

Scriviamo il sistema equivalente $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)-\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=2 \\ B=10^6\left(Km^2\right)\left[16-5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)\right] \end{cases}$

Risolviamo la prima equazione goniometrica trasformandola applicando la relazione tra gli archi associati cos(π+α)=-cos(α), valida per ogni α reale.

$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)-\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=2\rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)-\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)\right)=2\rightarrow$
$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=2\rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$. L'equazione è soddisfatta dai valori degli angoli $\frac{\pi}{3}+\varphi=2h\pi, h\in Z$, quindi per i valori $\varphi=2h\pi-\frac{\pi}{3}, h\in Z$.Tra gli infiniti valori di φ soluzioni dell'equazione scegliamo $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

Possiamo ora calcolare il valore della costante B. Si ha:

$$B=10^6\left(Km^2\right)\left[16-5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right]=11\cdot10^6\left(Km^2\right)$$

L'espressione della funzione goniometrica $f(t)$ è dunque

$$f(t)=10^6\left[5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{180}t-\frac{\pi}{3}\right)+11\right]\left(Km^2\right).$$

2. Si deve risolvere l'equazione

$$10^6\left[5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{180}t-\frac{\pi}{3}\right)+11\right]\left(Km^2\right)=13,5\cdot10^6\left(Km^2\right)$$

che semplifichiamo nella forma $5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{180}t-\frac{\pi}{3}\right)+11=13,5$, da cui $\cos\left(\frac{\pi}{180}t-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$. I valori di t che la soddisfano si deducono ponendo

$\frac{\pi}{180}t-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2h\pi$, $h\in Z$. Semplificata la costante π, i valori di t sono

$t=h\cdot360(giorni)$, $h\in Z$, oppure $t=(120+h\cdot360)(giorni), h\in Z$.

Poiché i valori ammissibili di t sono i giorni dell'anno che vanno da 1 a 360, gli unici giorni in cui la condizione imposta per l'estensione dei ghiacci è verificata sono il 120° e il 360° .

3. Si deve studiare la doppia disequazione $8,5\cdot10^6 Km^2\leq f(t)\leq 13,5\cdot10^6\ Km^2$, cioè

$$8,5\cdot10^6\left(Km^2\right)\leq10^6\left[5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{180}t-\frac{\pi}{3}\right)+11\right]\left(Km^2\right)\leq13,5\cdot10^6\left(Km^2\right)$$

che diventa $8,5\leq\left[5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{180}t-\frac{\pi}{3}\right)+11\right]\leq13,5$, che si può porre nell'ulteriore forma

equivalente $\frac{8,5-11}{5}\leq\cos\left(\frac{\pi}{180}t-\frac{\pi}{3}\right)\leq\frac{13,5-11}{5}\rightarrow-\frac{1}{2}\leq\cos\left(\frac{\pi}{180}t-\frac{\pi}{3}\right)\leq\frac{1}{2}$.

Pertanto la variabile *t* deve verificare le condizioni

$\left(\frac{\pi}{3}+2h\pi\leq\frac{\pi}{180}t-\frac{\pi}{3}\leq\frac{2\pi}{3}+2h\pi\right)\vee\left(\frac{4\pi}{3}+2h\pi\leq\frac{\pi}{180}t-\frac{\pi}{3}\leq\frac{5\pi}{3}+2h\pi\right), h\in Z$, che elaborate diventano

$\left(\frac{2}{3}+2h\leq\frac{t}{180}\leq1+2h\right)\vee\left(\frac{5}{3}+2h\leq\frac{t}{180}\leq2+2h\right), h\in Z$, quindi

$(120+h\cdot360\leq t\leq180+h\cdot360)\quad\vee(300+h\cdot360\leq t\leq360+h\cdot360)$, $h\in Z$.

I giorni in cui la funzione $f(t)$ verifica la proprietà richiesta nell'arco di un anno sono quelli che vanno dal 120° al 180° giorno e quelli che vanno dal 300° al 360° giorno, per complessivi 122 giorni.

In **Figura 2** sono indicate le rette parallele s_1, s_2, fra le quali è compreso il diagramma della funzione $f(t)$ i cui valori verificano la doppia disuguaglianza studiata:
$8{,}5\cdot10^6 Km^2 \le f(t) \le 13{,}5\cdot10^6\ Km^2$.

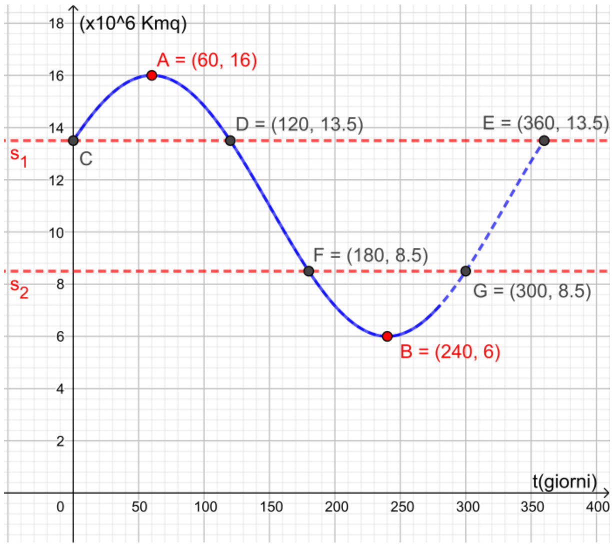

Figura 2- Particolari del diagramma della funzione f(t).

Figura 3
Immagine della superficie ghiacciata al Polo Nord diffusa dalla NASA e pubblicata dal giornale La Repubblica il 16-01-2016. Nel mese di Settembre 2016 la superficie ghiacciata è stata stimata essere 4,14·10^6 Km^2.
[Link al sito]

Notizie relative all'anno 2016 tratte dal sito La Repubblica.

Confrontare il sito:
http://www.repubblica.it/ambiente/2016/09/16/news/clima_il_ghiaccio_dell_artico_ha_toccato_l_estensione_minima_a_settembre-147909877/

ROMA - Un accentuato scioglimento nei primi dieci giorni di settembre ha portato il ghiaccio marino artico a raggiungere l'estensione minima annuale il 10 settembre, quando i satelliti hanno rilevato una superficie ghiacciata di 4,14 milioni di chilometri quadrati. La cifra, diffusa dalla Nasa, piazza il 2016 al secondo posto nella classifica degli anni caratterizzati dalle estensioni di ghiaccio marino più ridotte, alle spalle del 2012 (3,39 milioni di km quadrati) e appena davanti al 2007 (4,15 milioni di km quadrati). La classifica prende in considerazione gli ultimi 37 anni, parte cioè dall'inizio delle rilevazioni satellitari nel 1981.
Nei primi dieci giorni di settembre i satelliti hanno mostrato scioglimenti più rapidi dell'usuale, con una perdita di superficie di ghiaccio marino pari a 34.100km quadrati al giorno contro una media di 21mila km quadrati. Questa perdita, spiegano gli esperti, è stata marcata soprattutto nel mare dei Ciukci, situato tra l'omonima penisola e l'Alaska, un'area che ha risentito del passaggio di due intensi cicloni ad agosto.

Altra immagine della superficie ghiacciata artica Link al sito www.schepticalscience.com