

Preparazione all'Esame di Stato

(geometria analitica della retta e della circonferenza, progressioni aritmetiche, goniometria)

Problema

1. Le misure a, b, c dei lati di un triangolo sono in progressione aritmetica di ragione k . Si esprima in funzione di k il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo.
2. Si fissi nel piano π del triangolo un conveniente sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico π_{xy} e per il valore di $k=a/3$ si scrivano le coordinate dei vertici del triangolo ABC e le equazioni della circonferenza circoscritta e di quella inscritta al triangolo. Rappresentare nel piano cartesiano gli elementi geometrici elaborati.
3. Si calcoli il rapporto dei volumi delle due sfere di cui le circonferenze inscritta e circoscritta al triangolo ABC sono sezioni diametrali delle superfici sferiche corrispondenti con il piano cartesiano π_{xy} .

Elaborazioni

Nelle elaborazioni che seguono riteniamo valide le condizioni $a>0, k>0$.

1. Supponiamo che delle misure assegnate a, b, c , dei lati del triangolo ABC a sia quella minore e poniamo $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = c$. Sappiamo che le misure dei lati sono in progressione aritmetica di ragione k e dunque, nell'ipotesi che valga la catena di disuguaglianze $a < b < c$, risulterà $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b = a + k, \overline{AC} = c = a + 2k$.

- i. Ricordiamo che note le misure dei lati di un triangolo si può determinare l'area S dello stesso tramite la formula di Erone $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, nella quale p indica il **semiperimetro del triangolo** $p = (a+b+c)/2$, e il **raggio r della circonferenza inscritta** allo stesso triangolo è data dal rapporto tra il valore dell'area e la misura del semiperimetro: $r = S/p$.

ii. Risulta $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+a+k+a+2k}{2} = \frac{3(a+k)}{2}$; $p-a = \frac{3(a+k)}{2} - a = \frac{a+3k}{2}$;
 $p-b = \frac{3(a+k)}{2} - (a+k) = \frac{a+k}{2}$; $p-c = \frac{3(a+k)}{2} - (a+2k) = \frac{a-k}{2}$ e quindi anche

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{3(a+k)}{2} \cdot \frac{a+3k}{2} \cdot \frac{a+k}{2} \cdot \frac{a-k}{2}} = \frac{a+k}{4} \cdot \sqrt{3(a+3k)(a-k)}$$

possiamo esprimere il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo ABC come segue

$$r = \frac{S}{p} = \frac{a+k}{4} \cdot \sqrt{3(a+3k)(a-k)} : \frac{3(a+k)}{2} = \frac{\sqrt{3(a+3k)(a-k)}}{6}$$

Il valore trovato rappresenta l'espressione della misura del raggio della circonferenza inscritta nel triangolo ABC in funzione del parametro k , ragione della progressione, e della misura del lato minore $\overline{AB} = a$.

2. Per $k=a/3$ le misure dei lati del triangolo in ordine crescente sono $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = \frac{4}{3}a$, $\overline{AC} = \frac{5}{3}a$. Osserviamo che le misure dei lati del triangolo sono proporzionali ai numeri 3, 4, 5; infatti sussistono le uguaglianze $a : 3 = \frac{4}{3}a : 4 = \frac{5}{3}a : 5$ e poiché la terna 3, 4, 5 è pitagorica il triangolo ABC è rettangolo con AB, BC cateti e AC ipotenusa.

2.1 Fissiamo nel piano del triangolo il sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico π_{xy} con origine nel punto A, il segmento AB sull'asse delle ascisse e il vertice C nel primo quadrante: risulterà $A(0;0)$, $B(a;0)$, $C(a;4a/3)$. Vedere Figura 1.

2.2 Circonferenza circoscritta al triangolo

Osserviamo che la circonferenza circoscritta ad un triangolo rettangolo ha come diametro l'ipotenusa dello stesso, dunque il punto medio M del segmento AC, le cui coordinate sono $M(a/2; 2a/3)$, è il centro della circonferenza. Il raggio R della circonferenza in oggetto ha misura

$$R = \overline{AC} / 2 = \frac{5}{6}a.$$

Indicando con λ_1 la circonferenza la sua equazione nel riferimento cartesiano adottato è

$$\lambda_1 : \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{25}{36}a^2$$

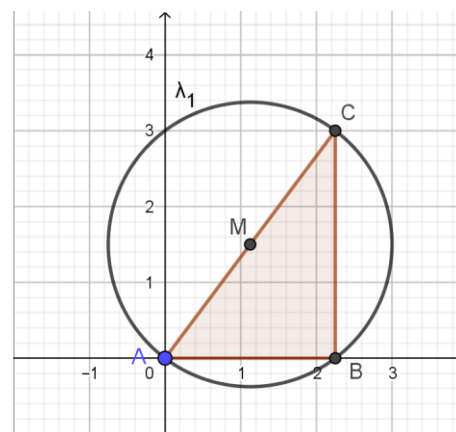


Figura 1

2.3 Circonferenza inscritta nel triangolo

La circonferenza inscritta in un triangolo **ha come centro l'incentro** del triangolo (punto di intersezione delle bisettrici ⁽¹⁾) **e come raggio la distanza dell'incentro da uno qualsiasi dei lati del triangolo**. Sia I l'incentro del triangolo. Possiamo determinare le coordinate di I scrivendo le equazioni cartesiane delle bisettrici di due angoli del triangolo e risolvendo il sistema formato da dette equazioni.

Per la posizione particolare del triangolo ABC nel piano cartesiano conviene determinare le equazioni della bisettrice b_1 dell'angolo retto ABC e della bisettrice b_2 dell'angolo acuto BAC.

La **bisettrice b_1** ha coefficiente angolare $m=-1$. Applicando il modello dell'**equazione esplicita della retta passante per un punto** e di assegnato coefficiente angolare risulta: $b_1 : y - y_B = m(x - x_B)$, da cui $b_1 : y = -x + a$.

⁽¹⁾ Si ricordi che:

- a) in un piano la bisettrice di un angolo è il luogo dei punti del piano equidistanti dai lati dell'angolo;
- b) le bisettrici di un triangolo si intersecano in un punto detto incentro del triangolo.

Per quanto concerne la **bisettrice** b_2 dell'angolo acuto BAC conviene osservare che

la **tangente goniometrica dell'angolo** vale $\tan(BAC) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{4a}{3} : a = \frac{4}{3}$, quindi al

variare del parametro a il valore **rimane costante**. Poniamo brevemente $BAC = \alpha$. La retta bisettrice richiesta dell'angolo α forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo di ampiezza $\alpha/2$ per cui la sua equazione cartesiana sarà $y = \tan(\alpha/2)x$. Osserviamo ora che dall'essere α acuto le funzioni goniometriche $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ possono essere espresse in funzione di $\tan(\alpha)$ come segue

$$\sin(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}, \quad \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}} \text{ e dunque i loro valori sono}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{4/3}{\sqrt{1+16/9}} = \frac{4}{5}, \quad \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+16/9}} = \frac{3}{5}$$

Possiamo ora calcolare il valore del coefficiente angolare $\tan(\alpha/2)$ della bisettrice b_2 ricordando la nota relazione goniometrica $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$ ⁽²⁾. Risulta

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4/5}{1+3/5} = \frac{1}{2}$$

e dunque l'equazione della bisettrice cercata è $b_2 : y = \frac{1}{2}x$.

Coordinate dell'incentro del triangolo ABC

Dobbiamo risolvere il sistema formato dalle equazioni cartesiane delle bisettrici b_1 , b_2 .

$$\begin{cases} b_1 : y = -x + a \\ b_2 : y = \frac{1}{2}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = -x + a \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}a \\ y = \frac{1}{3}a \end{cases}$$

Dunque $I\left(\frac{2}{3}a; \frac{1}{3}a\right)$

La **distanza dell'incentro I dal cateto AB** è rappresentata dal valore dell'**ordinata del punto** e dunque il raggio della circonferenza in esame misura $a/3$. Possiamo concludere che l'equazione cartesiana della circonferenza inscritta è

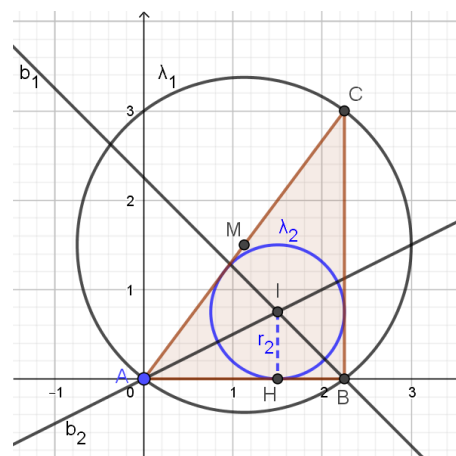


Figura 2

⁽²⁾ Si tratta di un'utile **espressione dedotta dalle formule di bisezione** dopo aver osservato che $\tan(\alpha/2)$ e $\sin(\alpha)$ sono concordi.

$$\lambda_2 : \left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}a\right)^2 = \frac{1}{9}a^2$$

In Figura 2 sono rappresentati tutti gli elementi geometrici elaborati.

3. Il **volume V di una sfera** di raggio r vale $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Per le due sfere in oggetto i raggi misurano $r_1 = R = \frac{5}{6}a$, relativamente alla circonferenza circoscritta, $r_2 = r_i = \frac{1}{3}a$ relativamente alla circonferenza inscritta, dunque si ha

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{4}{3}\pi r_1^3\right) : \left(\frac{4}{3}\pi r_2^3\right) = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\left(\frac{5}{6}a\right) : \left(\frac{1}{3}a\right)\right)^3 = \frac{125}{8}$$