

Esercitazione

Il relazione alla funzione $f(x) = x^3 \ln(x)$ risolvere i quesiti che seguono

- Dimostrare che la funzione è prolungabile per continuità nel punto $x=0$. Detta $\varphi(x)$ la funzione prolungamento della funzione f , dimostrare che φ ammette derivata di qualsiasi ordine per $x>0$ mentre nel punto $x=0$ ammette solo derivata prima.
- Relativamente alla funzione $y = f(x)$, determinare il punto A in cui il suo diagramma taglia l'asse delle ascisse e riconoscere che ammette un punto di minimo assoluto ed un punto di flesso F. Rappresentare il diagramma della funzione.
- Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco di f e da quello dell'asse delle ascisse relativamente all'intervallo $[0;1]$.

Elaborazioni

- a.** La funzione in oggetto è definita per ogni $x>0$. La funzione è prolungabile per continuità in $x=0$ se esiste ed è finito il limite per $x \rightarrow 0^+$. Affrontando lo studio del limite si riconosce che si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(x) = 0 \cdot (-\infty);$$

in realtà si tratta di un limite notevole il cui valore è zero. Si può comunque studiare il limite riconducendolo alla forma ∞/∞ e applicando una volta la regola di de l'Hôpital. Infatti risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-3}} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{x^4}{3}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^3}{3}\right) = 0$$

La funzione f è dunque è prolungabile per continuità nel punto $x=0$ e il suo prolungamento è

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^3 \ln(x) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Derivabilità della funzione φ

Per $x > 0$ la funzione φ ammette derivata di qualsiasi ordine perché la funzione $y = f(x)$ ha derivata di qualsiasi ordine. Facciamo vedere che la funzione φ è derivabile anche nel punto $x=0$ applicando la definizione di derivata prima. Studiamo il limite del rapporto incrementale per $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 \ln(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-2}} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{x^3}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0,$$

dunque la funzione è derivabile in $x=0$ e risulta $\varphi'(0)=0$. La funzione derivata prima

è così definita

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 3x \ln(x) + x^2 & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Per $x > 0$ risulta $\varphi''(x) = 3 \ln(x) + 3x \cdot \frac{1}{x} + 2x = 3 \ln(x) + 3 + 2x$

Proviamo che la funzione φ non è derivabile due volte nel punto $x=0$

Applichiamo ancora la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale per $x \rightarrow 0^+$, questa volta alla funzione derivata prima $\varphi'(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x \ln(x) + x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 \ln(x) + x = 3(-\infty) + 0 = -\infty$$

quindi non esiste la derivata seconda in $x=0$ e a maggior ragione la funzione non ammette derivate di ordine superiore nello stesso punto.

- b.** Il diagramma della funzione taglia l'asse delle ascisse nel punto $x=1$, infatti risulta $f(1)=1 \cdot \ln(1)=0$, $f(x)<0$ per $0 < x < 1$, $f(x)>0$ per $x>1$; dunque il punto in cui il diagramma della funzione taglia l'asse delle ascisse è $A(1;0)$.

Studiamo segno e zeri della funzione derivata prima

$$f'(x) \geq 0 \rightarrow x(3 \ln(x) + x) \geq 0$$

poiché per il dominio deve essere $x > 0$, risulterà $f'(x) > 0$ se

e solo se $\ln(x) > -\frac{x}{3}$. Dal confronto dei grafici delle

funzioni elementari $y = -\frac{x}{3}$, $y = \ln(x)$ emerge che la

disuguaglianza è verificata per $x > \alpha$, con $\alpha \approx 0,7729$, dunque nell'intervallo $]0; \alpha[$ la derivata prima è negativa e

la funzione è strettamente decrescente, per $x > \alpha$ la derivata prima è positiva e la funzione è strettamente

crescente, quindi nel punto $x = \alpha$ ammette il suo minimo

assoluto il cui valore è $\min = f(\alpha) = \alpha^3 \cdot \ln(\alpha) \approx -0,1189$.

Per la determinazione del punto di flesso si devono studiare segno e zeri della derivata seconda.

$$f''(x) \geq 0 \rightarrow 3 \ln(x) + 3 + 2x \geq 0 \rightarrow \ln(x) \geq -1 - \frac{2}{3}x$$

Dal confronto grafico delle funzioni $y = \ln(x)$, $y = -1 - \frac{2}{3}x$, emerge che la disuguaglianza è

verificata per $x \geq \beta$, con $\beta \approx 0,3009$. Nel punto $x = \beta$ il grafico della funzione presenta un flesso:

$f(\beta) \approx -0,0327$; $F(0,3009; -0,0327)$. La concavità della funzione è rivolta verso l'alto per $x > \beta$ e verso il basso per $0 < x < \beta$.

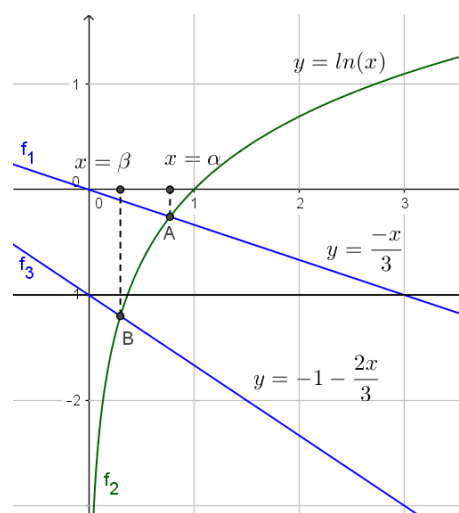


Figura 1

Si faccia riferimento alla Figura 1 per i confronti grafici richiamati.

- c. Considerato che la funzione nell'intervallo è negativa, il valore dell'area della regione di piano in oggetto è dato da quello del seguente integrale improprio

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 -x^3 \ln(x) dx$$

Studio l'integrale indefinito associato

Si deve applicare il metodo di integrazione per parti. Si ha:

$$\begin{aligned} \int -x^3 \ln(x) dx &= -\frac{x^4}{4} \cdot \ln(x) + \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= -\frac{x^4}{4} \cdot \ln(x) + \int \frac{x^3}{4} dx = -\frac{x^4}{4} \cdot \ln(x) + \frac{x^4}{16} + c \end{aligned}$$

Calcolo dell'integrale definito

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 -x^3 \ln(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{x^4}{4} \cdot \ln(x) + \frac{x^4}{16} \right]_{\varepsilon}^1 =$$

$$\left[-\frac{1}{4} \cdot \ln(1) + \frac{1}{16} \right] - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{\varepsilon^4}{4} \cdot \ln(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^4}{16} \right] = \frac{1}{16} = 0,0625$$

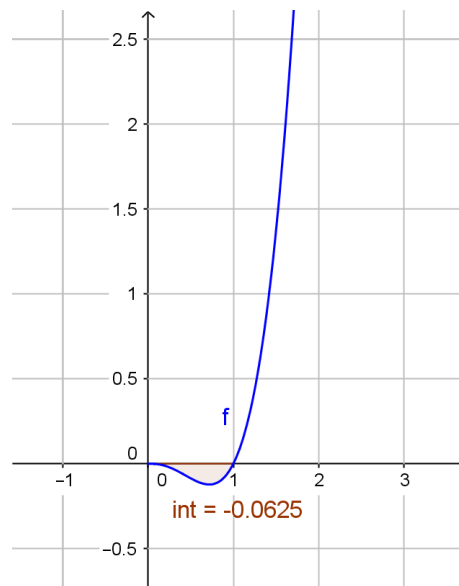


Figura 2