

Geometria analitica e analisi matematica

Studio di due limiti

Problema (sulla parabola)

- 1) In un piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali xOy si determini l'equazione della parabola λ della forma $y = kx^2 + 3$ passante per il punto $A(2;0)$. Rappresentare la curva.
- 2) Determinare l'equazione della retta tangente alla parabola nel punto A e precisare il suo coefficiente angolare.
- 3) Sia P un punto della parabola appartenente al primo quadrante e avente coordinate positive. Determinare il coefficiente angolare della retta AP e studiare il suo limite per $P \rightarrow A$. Confrontando il valore trovato per il limite con il coefficiente angolare della tangente in A cosa si può affermare?
- 4) Scrivere l'equazione della retta tangente in P alla parabola e determinare il punto B in cui la retta interseca l'asse delle ascisse.
- 5) Detta P' la proiezione di P sull'asse delle ascisse, studiare il limite del rapporto tra l'area del triangolo PP'A e l'area del triangolo PAB quando $P \rightarrow A$.

Elaborazioni

- 1) L'equazione parametrica $y = kx^2 + 3$ con $k \neq 0$ rappresenta infinite parabole con asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate; per determinare il valore di k per cui si ottiene la curva passante A si deve imporre che le coordinate di questo punto soddisfino l'equazione.
 $A \in \lambda \Leftrightarrow 4k + 3 = 0$, quindi se e solo se $k = -\frac{3}{4}$. L'equazione della parabola cercata è $\lambda: y = -\frac{3}{4}x^2 + 3$.
- 2) L'equazione della retta tangente alla parabola in A appartiene al fascio proprio di rette di centro A la cui equazione è $F: y - y_A = m(x - x_A)$. Per determinare il valore del coefficiente angolare m si mettono a sistema l'equazione del fascio e quella della parabola, quindi si trova l'equazione risolvente e si impone che questa abbia radici coincidenti, dunque che il suo discriminante sia nullo; in questo modo si ottiene un'equazione nell'incognita m che risolta fornisce il valore cercato.

$$F: y = m(x - 2) \quad (\text{equazione del fascio di centro A})$$

$$\begin{cases} F: y = m(x - 2) \\ \lambda: y = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \end{cases} \rightarrow -\frac{3}{4}x^2 + 3 = mx - 2m \rightarrow 3x^2 + 4mx - 8m - 12 = 0 \quad (\text{equazione risolvente})$$

$$\text{Condizione di tangenza } \frac{\Delta}{4} = 4m^2 - 3(-8m - 12) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -3$$

La retta tangente t_A alla parabola in A ha equazione $t_A: y = -3x + 6$. Il coefficiente angolare di questa retta è $m = -3$.

- 3) Il generico punto P della parabola appartenente al primo quadrante con coordinate positive è $P\left(\alpha; 3 - \frac{3}{4}\alpha^2\right)$, con $0 < \alpha < 2$.

Il coefficiente angolare della retta passante per i due punti A, P è

$$m([A;P]) = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{3 - \frac{3}{4}\alpha^2 - 0}{\alpha - 2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4 - \alpha^2}{\alpha - 2}$$

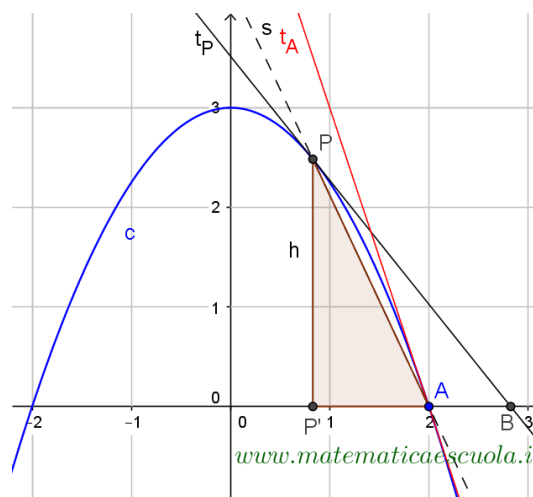
Osserviamo che il valore del coefficiente angolare esiste perché dalla condizione $0 < \alpha < 2$ si deduce che $\alpha - 2 \neq 0$.

Studio del limite del coefficiente angolare

Se il punto P muovendosi sulla parabola nel primo quadrante tende alla posizione del punto A allora la sua ascissa tende a quella di A, quindi $\alpha \rightarrow 2$, precisamente $\alpha \rightarrow 2^-$, cioè α tende a 2 da sinistra. Il limite da studiare è

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow A} m([A;P]) &= \lim_{\alpha \rightarrow 2^-} \frac{3}{4} \cdot \frac{4 - \alpha^2}{\alpha - 2} = \\ \lim_{\alpha \rightarrow 2^-} \frac{3}{4} \cdot \frac{(2 - \alpha)(2 + \alpha)}{-(2 - \alpha)} &= \lim_{\alpha \rightarrow 2^-} -\frac{3}{4} \cdot (2 + \alpha) = -3 \end{aligned}$$

Notiamo che il valore trovato per il limite è uguale al coefficiente angolare della retta tangente alla parabola in A. Ciò non è un caso. In effetti, se si considera una retta s secante una curva γ in due punti A e P e si mantiene fisso A e si fa muovere P sulla curva avvicinandolo indefinitamente ad A, se la curva ammette tangente t_A nel punto A, la retta s **tende a sovrapporsi alla retta tangente t_A** . Nel caso in cui la retta tangente ammetta coefficiente angolare (quindi non sia parallela all'asse delle ordinate) allora anche il coefficiente angolare della retta AP tende al coefficiente angolare della retta tangente in A per $P \rightarrow A$.



- 4) Equazione della retta tangente in P alla parabola.
 - a. Seguendo un percorso analogo a quello visto sopra per trovare l'equazione della tangente in A alla parabola, dopo alcune elaborazioni, si riscontra che l'equazione della tangente in $P\left(\alpha; 3 - \frac{3}{4}\alpha^2\right)$ è $t_P: y = -\frac{3}{2}\alpha x + \frac{3}{4}\alpha^2 + 3$.
 - b. La retta t_P interseca l'asse delle ascisse nel punto $B\left(\frac{\alpha^2 + 4}{2\alpha}; 0\right)$.
- 5) Area dei triangoli $PP'A$, PAB
 - c. Osserviamo che $P'(\alpha; 0)$.
 - d. Per calcolare le aree dei due triangoli è opportuno considerarli sulle basi $P'A$, AB , rispetto alle quali hanno la stessa altezza PP' , che misura è $\overline{PP'} = y_P = 3 - \frac{3}{4}\alpha^2$.
 - e. $Area(PP'A) = \frac{1}{2} \cdot \overline{P'A} \cdot \overline{PP'} = \frac{1}{2} \cdot (2 - \alpha) \left(3 - \frac{3}{4}\alpha^2\right) = \frac{3}{8}(2 - \alpha)(4 - \alpha^2)$

$$f. \quad Area(PAB) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{P'P} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\alpha^2 + 4}{2\alpha} - 2 \right) \left(3 - \frac{3}{4}\alpha^2 \right) = \frac{3}{16\alpha} (4 - \alpha^2) (2 - \alpha)^2$$

g. Studio del limite

$$\lim_{P \rightarrow A} \frac{Area(PP'A)}{Area(PAB)} = \lim_{\alpha \rightarrow 2^-} \frac{3}{8} (2 - \alpha) \cancel{(4 - \alpha^2)} \cdot \frac{16\alpha}{3 \cancel{(4 - \alpha^2)} (2 - \alpha)^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 2^-} \frac{2\alpha}{2 - \alpha} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Considerazioni sul valore del limite

Il limite studiato si presenta nella forma indeterminata 0/0 e ciò è conseguenza del fatto che i due triangoli PP'A, PAB per $P \rightarrow A$ degenerano nell'unico punto A, quindi la loro area tende a zero. Le funzioni che esprimono le aree dei due triangoli sono infinitesime per $\alpha \rightarrow 2$. Il risultato ottenuto indica che l'area del triangolo PAB tende a zero più velocemente dell'area del triangolo PP'A, precisamente, l'area di PAB tende a zero con velocità 3 (infinitesimo di ordine 3), l'area di PP'A tende a zero con velocità 2 (infinitesimo di ordine 2).