Geometria analitica e analisi matematica

Posizione limite di una secante ad una circonferenza

Problema (circonferenza)

Si consideri nel riferimento cartesiano xOy la circonferenza con centro nell'origine O degli assi e raggio $r=\sqrt{5}$. Dopo aver scritto l'equazione della circonferenza si consideri il suo punto P(2;1) e si scriva l'equazione della retta tangente alla circonferenza in P.

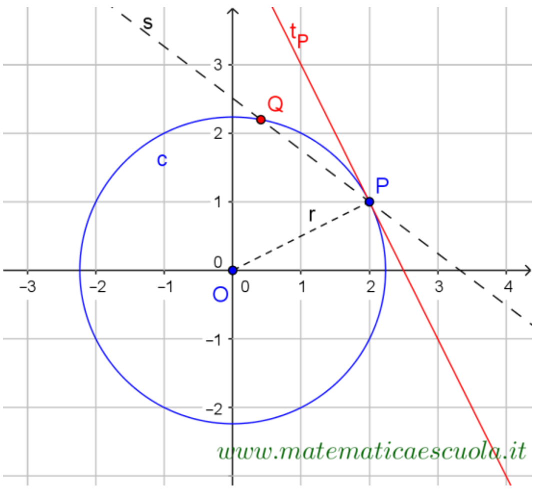
Preso un punto Q sulla circonferenza appartenente al primo quadrante si determini il coefficiente angolare della retta [A;P] e si studi il limite cui tende quando Q→P.

Confrontare il valore trovato del limite suddetto con quello del coefficiente angolare della tangente in P alla circonferenza.

Risposte Coeff.angolare della tangente m=-2; valore del limite=coeff.angolare della tangente.

Elaborazioni

Facciamo riferimento alla figura riportata a margine.



1) La circonferenza ha equazione $\gamma: x^2+y^2=r^2$ ed essendo $r^2=\overline{OP}^2=5$ risulta $\gamma: x^2+y^2=5$.
2) La retta tangente alla circonferenza in P, che indichiamo con t_P, essendo perpendicolare al raggio OP ha coefficiente angolare uguale all'antireciproco del coefficiente angolare della retta OP; quest'ultima ha equazione $[O;P]: y=\frac{1}{2}x$, pertanto il coefficiente angolare della tangente in oggetto è $m(t_P)=-2$ e l'equazione della retta è $t_P: y-y_P=m(t_P)(x-x_P)$, da cui

$$t_P: y-1=-2(x-2) \to t_P: y=-2x+5$$

3) Il punto Q appartenente alla circonferenza e trovandosi nel primo quadrante avrà coordinate $Q\left(x;\sqrt{5-x^2}\right)$, con $0 \le x \le \sqrt{5}$.
4) La retta secante QP ha coefficiente angolare $m([Q;P])=\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=\frac{\sqrt{5-x^2}-1}{x-2}$
5) Si deve studiare il seguente limite

$$\lim_{Q\to P}([Q;P])=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5-x^2}-1}{x-2}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Si può procedere nello studio razionalizzando il numeratore della frazione come segue

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5-x^2}-1}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{5-x^2}+1}{\sqrt{5-x^2}+1}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{5-x^2}\right)^2-1}{(x-2)\left(\sqrt{5-x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{(x-2)\left(\sqrt{5-x^2}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-\cancel{(x-2)}\,(x+2)}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{5-x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x+2)}{\left(\sqrt{5-x^2}+1\right)}=-\frac{4}{2}=-2$$

Osservazione

Il valore ottenuto per il limite coincide con quello del coefficiente angolare della retta tangente alla circonferenza nel punto P e ciò è dovuto al fatto che per Q che tende a P la retta secante [Q;P] tende a sovrapporsi proprio alla suddetta tangente alla curva.