

Generalità sulle funzioni. Analisi del grafico

Funzione dispari, dominio, codominio, zeri, antimmagine

punti di massimo e punti di minimo, monotonia, estremi della funzione, equazione associata

Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{4}x|x| - \frac{1}{2}x^3$, con $x \in [-1,5; 1,5]$, rappresentata in Figura 1.

- a) Dimostrare che è dispari.
- b) Determinare gli zeri della funzione e il codominio.
- c) Servendosi del diagramma rappresentato stabilire quali sono i punti di massimo o di minimo relativi o assoluti.
- d) Osservato che $f(1) = -\frac{1}{4}$, determinare l'antimmagine $f^{-1}\left(\left\{-\frac{1}{4}\right\}\right)$.
- e) La Figura 2 rappresenta un ingrandimento di una parte del diagramma della funzione e il punto M ha coordinate $(1/3; 1/108)$. Quante radici ammette l'equazione $f(x) = \frac{1}{110}$?
Sfruttando il diagramma della funzione stimare approssimativamente i valori delle radici individuate.

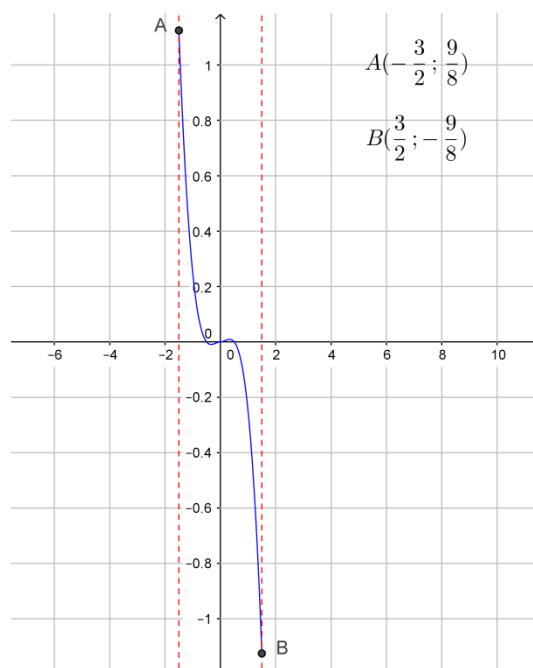


Figura 1

Elaborazioni

- a) La funzione è dispari se:
 - 1) il suo dominio è simmetrico rispetto allo zero;
 - 2) per ogni x del dominio risulta $f(-x) = -f(x)$.

La condizione (a.) è soddisfatta dall'intervallo $[-1,5; 1,5]$ che è simmetrico rispetto al punto $x=0$. Occorre provare la proprietà (b.). Osserviamo che $\forall x \in A$ si ha:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{4}(-x)|-x| - \frac{1}{2}(-x)^3 = \\ &= -\frac{1}{4}x|x| + \frac{1}{2}x^3 = -\left(\frac{1}{4}x|x| - \frac{1}{2}x^3\right) = -f(x) \end{aligned}$$

La proprietà è verificata, quindi la

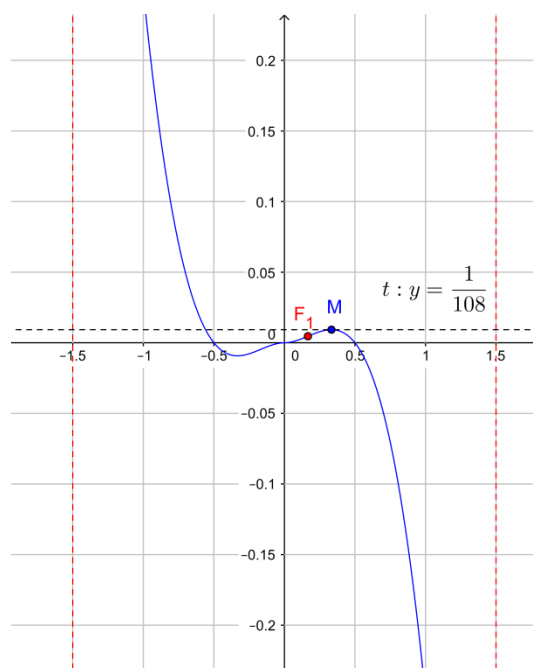


Figura 2

funzione è dispari e il suo diagramma è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani.

- b)** Gli zeri della funzione si determinano risolvendo l'equazione $f(x)=0$. Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x|x| - \frac{1}{2}x^3 &= \frac{1}{4}x(|x| - 2x^2) = \frac{1}{4}x(|x| - 2|x|^2) = 0 \Leftrightarrow x|x|(1-2|x|) = 0 \Leftrightarrow (x=0) \vee (1-2|x|=0) \\ &\Leftrightarrow (x=0) \vee \left(|x| = \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (x=0) \vee \left(x = \pm \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Dunque la funzione si annulla nei punti $x_1=-1/2$, $x_2=0$, $x_3=1/2$.

Dal grafico della funzione (Figura 5) si deduce che il codominio è l'intervallo avente per estremi le ordinate dei punti A e B. $\text{Codom}(f) = \left[-\frac{9}{8}; -\frac{9}{8}\right]$.

- c)** La funzione è limitata, assume il suo **massimo** per $x=-1,5$, ed è $\text{Max}=9/8$, il valore **minimo** per $x = 1,5$, ed è $\text{min}=-9/8$. Ancora, dalla Figura 6 e dalle informazioni sulle coordinate del punto $M(1/3; 1/108)$, si deduce che il punto $x = 1/3$ è di **massimo relativo** (proprio) e, per la simmetria del diagramma rispetto all'origine, che il punto di ascissa $x = -1/3$ è di **minimo relativo** (proprio), con $f(-1/3)=-1/108$.

- d)** Risulta $f(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$. Nel precedente punto c) abbiamo precisato che $x=1/3$ è di massimo relativo; inoltre, dal diagramma si deducono le seguenti proprietà:

- 1) la funzione è **strettamente decrescente** in ciascuno degli intervalli $\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right]$, $\left]-\frac{3}{2}; -\frac{1}{3}\right]$, mentre è **strettamente crescente** in $\left]-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$;
- 2) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{108}$ e $-\frac{1}{108} > -\frac{1}{4}$.

Dette informazioni permettono di affermare che la funzione assume il valore $-1/4$ solo per $x=1$. Pertanto, dalla definizione di antimmagine di un insieme per una particolare funzione possiamo affermare che $f^{-1}\left(\left\{-\frac{1}{4}\right\}\right) = \{1\}$.

- e)** L'equazione $f(x) = \frac{1}{110}$ ammette tre radici distinte. Spieghiamo perché.

Evidentemente sussistono le disuguaglianze $0 < \frac{1}{110} < \frac{1}{108}$. Per individuare il numero delle soluzioni dell'equazione, poiché possiamo sfruttare il diagramma fornito (Figura 6), possiamo mettere a confronto il diagramma della funzione $y = f(x)$ con quello della retta di equazione $y = \frac{1}{110}$. Il numero dei punti di intersezione della retta con il diagramma della funzione, se i punti sono distinti e nessuno di essi è un flesso a tangente orizzontale, determina il numero delle radici dell'equazione. Dalle caratteristiche di monotonia si evince che la retta interseca il grafico della curva in tre punti di ascisse x_1 , x_2 , x_3 e risulta

$$-\frac{3}{2} < x_1 < \frac{1}{2}; \quad 0 < x_2 < \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{3} < x_3 < \frac{1}{2}.$$

La certezza che nessuno dei punti indicati è punto di flesso a tangente orizzontale per la funzione si ricava dallo studio della derivata seconda. Riportiamo di seguito le espressioni della derivata prima e della derivata seconda.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x(1+3x) & \text{per } -\frac{3}{2} \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}x(1-3x) & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}; \quad f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1+6x) & \text{per } -\frac{3}{2} \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}(1-6x) & \text{per } 0 < x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Dall'analisi delle strutture algebriche delle due derivate possiamo affermare che la funzione ammette come punti di flesso $x_1' = -\frac{1}{6}$, $x_2' = 0$, $x_3' = \frac{1}{6}$; in particolare x_1' e x_3' sono a tangente obliqua, infatti in essi la derivata prima della funzione non si annulla, mentre x_2' è a tangente orizzontale.

Notiamo che i punti di flesso x_1' , x_2' sono certamente distinti dai tre punti x_1 , x_2 , x_3 .

Dobbiamo invece provare che risulta anche $x_3' = \frac{1}{6} \neq x_2$. All'uopo notiamo

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{216} \neq \frac{1}{110} = f(x_2)$$

Si deduce anche che il punto x_2 , radice dell'equazione $f(x) = \frac{1}{110}$, è diverso da $x_3' = \frac{1}{6}$.

Concludiamo dunque che l'equazione $f(x) = \frac{1}{110}$ ammette effettivamente tre radici reali e distinte.

Osservazione

In Figura 2 è indicato il punto di flesso $F_1\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{216}\right)$.