

La legge del decadimento radioattivo

Applicazione delle equazioni differenziali

Problema⁽¹⁾

La velocità di decadimento di un campione di isotopi radioattivi è proporzionale alla quantità degli isotopi presenti in ogni istante. Se $N(t)$ è la quantità di isotopi radioattivi presente nell'istante t la legge della velocità di decadimento può essere scritta nella forma

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \quad (1)$$

essendo $\lambda > 0$ la costante di decadimento.

- Indicato con N_0 il numero di isotopi radioattivi presenti all'inizio dell'osservazione del materiale radioattivo, dimostrare che la legge che fornisce nell'istante t il numero degli isotopi radioattivi è
$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (2)$$
- Indicato con T il tempo di dimezzamento del materiale radioattivo, esprimere la legge (2) facendo comparire nella stessa la costante T .
- Dimostrare che fissato un istante qualsiasi t risulta verificata l'uguaglianza

$$N(t+T) = \frac{1}{2} N(t). \quad (3)$$

Premesse alla risoluzione

- La legge (1) della velocità di decadimento della sostanza radioattiva è un'equazione differenziale del primo ordine, nella quale la variabile t è espressa in un'opportuna unità temporale (secondi, giorni, anni,...). Per conoscere l'espressione della legge matematica per $N(t)$ si deve risolvere detta equazione. L'equazione ammette ∞^1 soluzioni, ma una volta fissato il numero iniziale N_0 di isotopi radioattivi presenti nella materia si determinerà la legge di evoluzione della specifica quantità di materiale in esame.
- La costante T di dimezzamento del numero degli isotopi radioattivi indica il tempo che è necessario che trascorra a partire da un istante t prefissato affinché il numero degli isotopi radioattivi presenti nel campione di materiale in esame sia la metà di quelli presenti nell'istante t . Dunque, se nell'istante t il numero di isotopi radioattivi è $N(t)$, nell'istante $t+T$ il numero degli isotopi radioattivi è $N(t)/2$.

Elaborazioni

- Risoluzione dell'equazione differenziale

Al primo membro della
$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \quad (1)$$

⁽¹⁾ Testo presente nel Volume "Verso la seconda prova di Matematica", pag.31, autori M. Bergamini, G. Barozzi, Zanichelli, ed. 2016

figura la derivata prima rispetto al tempo del numero di isotopi radioattivi presenti. Separando le variabili N e t e integrando i due membri si ricava l'espressione dell'integrale generale dell'equazione.

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \rightarrow \frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda dt \rightarrow \int \frac{dN(t)}{N(t)} = \int -\lambda dt \rightarrow \ln(N(t)) = -\lambda t + c^{(2)} \rightarrow$$

$$N(t) = e^{-\lambda t + c} = ke^{-\lambda t}, \text{ con } k > 0. \quad (1.1)$$

L'insieme delle funzioni espresse dalla (1.1), al variare del parametro reale k rappresenta l'integrale generale dell'equazione differenziale (1).

Si determina la costante k imponendo che per $t=0$ (unità temporali) risulti $N(0) = N_0$. Poiché

$$N(0) = ke^{-\lambda \cdot 0} = k, \text{ dovrà risultare } k = N_0, \text{ quindi la legge di decadimento è}$$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}, \quad (2)$$

come indicato nella (2).

- b) Per definizione T è il tempo che deve trascorrere affinché il numero degli isotopi radioattivi si dimezzi. Dunque in riferimento al numero N_0 presente nell'istante iniziale $t=0$ deve risultare

$$N(T) = N_0 e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} N_0, \text{ da cui } e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \rightarrow (e^{-\lambda})^T = \frac{1}{2} \rightarrow e^{-\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}$$

La (2) si può porre nella forma seguente

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \quad (2.1)$$

- c) Dimostriamo ora l'uguaglianza (3). Risulta

$$N(t+T) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t+T}{T}} = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{t}{T}} = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \frac{1}{2} \cdot N(t) \quad \text{C.V.D.}$$

⁽²⁾ Si osservi che $N(t) > 0$ e quindi non è stato scritto $\ln|N(t)|$