

QUESTIONARIO

1. Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $y=3$ dalla regione di piano delimitata dalla curva di equazione $y=x^3-x+3$ e dalla stessa retta.

2. Verificare che la funzione $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{3^x} + 1}$ ha una discontinuità di prima specie ("a salto"), mentre la

funzione $g(x) = \frac{x}{\frac{1}{3^x} + 1}$ ha una discontinuità di terza specie ("eliminabile").

Elaborazioni

1. La retta di equazione $y=3$ interseca la curva di equazione $y=x^3-x+3$ in tre punti A, B, C di ascisse rispettivamente -1, 0, 1; detti valori si ottengono risolvendo l'equazione $x^3-x+3=3$, che diventa $x^3-x=0$. In Figura 1 sono rappresentate la curva e la retta.

Osserviamo che la curva e la retta delimitano una regione piana che è simmetrica rispetto al punto B(0;3) e la rotazione di essa attorno alla retta r definisce un solido il cui volume è il risultato del seguente integrale definito

$$V = 2 \int_0^1 \pi (x^3 - x)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (x^6 - 2x^4 + x^2) dx =$$

$$2\pi \left[\frac{x^7}{7} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{16}{105} \pi$$

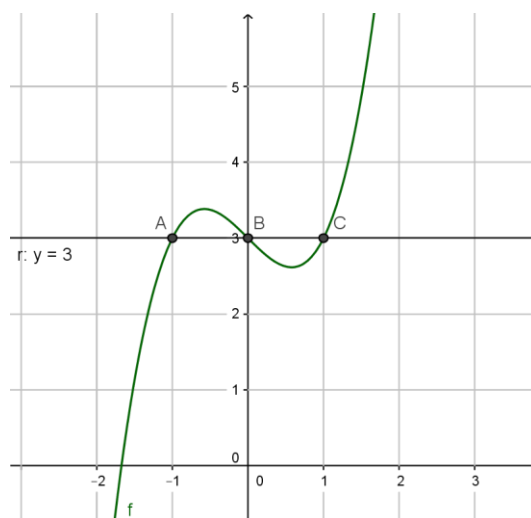


Figura 1

*** **

2. La funzione $f(x)$ è definita per ogni valore reale diverso da zero. In ogni punto del suo dominio è continua. Per classificare il comportamento per $x \rightarrow 0$ è necessario studiare i due limiti laterali. Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{3^x} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{3^{0^+}} + 1} = \frac{1}{3^{+\infty} + 1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{1}{3^x} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{3^{0^-}} + 1} = \frac{1}{3^{-\infty} + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1^-$$

Poiché i due valori ottenuti per i limiti sono finiti e diversi tra loro si conclude che in $x=0$ la funzione presenta una discontinuità di **prima specie**, con salto $\sigma = 0^+ - 1^- = -1$.

Anche la funzione $g(x)$ è definita per ogni x reale diverso da zero. Si esegue uno studio analogo per $x \rightarrow 0$ per la classificazione del punto. Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{0}{+\infty} = 0^+; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{0}{3^{-\infty} + 1} = \frac{0^-}{0+1} = 0^-$$

I due limiti laterali tendono a zero, quindi nel punto

la discontinuità è eliminabile (terza specie). In Figura 2 si possono osservare i diagrammi delle due funzioni in prossimità di $x=0$. Nella figura è rappresentato anche l'asintoto orizzontale $s_1: y=1/2$ del grafico della funzione $f(x)$.

Il lettore verifichi che il diagramma della funzione $g(x)$ ammette come asintoto obliquo la retta di equazione $s_2: y = \frac{x}{2} - \frac{\ln(3)}{4}$.

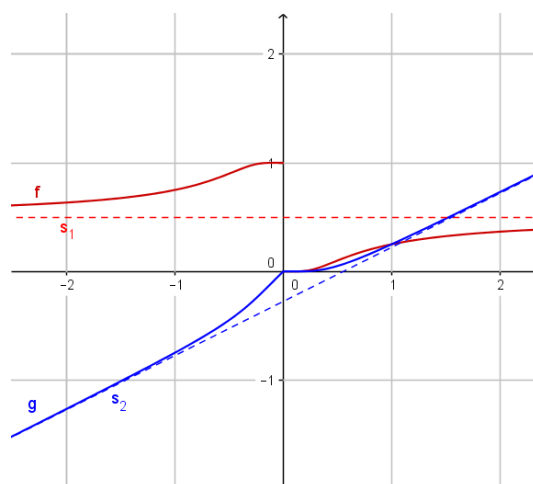


Figura 2