Ottimizzazione: due problemi di massimo sulla circonferenza

Problema_1 Fra tutti i triangoli rettangoli che hanno la stessa ipotenusa determinare quello di area massima.

Problema_2 Considerare una circonferenza di raggio r e inscrivervi un triangolo isoscele. Tra tutti i triangoli isosceli che si possono inscrivere determinare quello per il quale la somma della base e della relativa altezza è massima.

Elaborazioni

Problema_1

Risoluzione del problema con considerazioni geometriche

1) Ricordiamo che ogni triangolo rettangolo è inscrivibile in una semicirconferenza avente l’ipotenusa come diametro. Ciò premesso, fissato il segmento AB che rappresenta l’ipotenusa comune a tutti i triangoli rettangoli in oggetto, il vertice C dell’angolo retto deve trovarsi sulla circonferenza di diametro AB.
2) L’area di un triangolo è data dal semiprodotto della misura di un lato per la misura della relativa altezza. Assunta per ciascuno dei triangoli AB come base, la corrispondente altezza CH è la distanza del punto C dalla retta del diametro AB della circonferenza. Dunque l’area del triangolo ABC vale $S(ABC)=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CH}}{2}$. Poiché nella formula indicata la misura $\overline{AB}$, comune a tutti i triangoli, è costante, al variare del vertice C l’area assumerà il valore massimo quando la misura dell’altezza CH è massima e ciò si verifica quando il triangolo ABC risulta isoscele, con $\overline{CH}=\frac{\overline{AB}}{2}$.

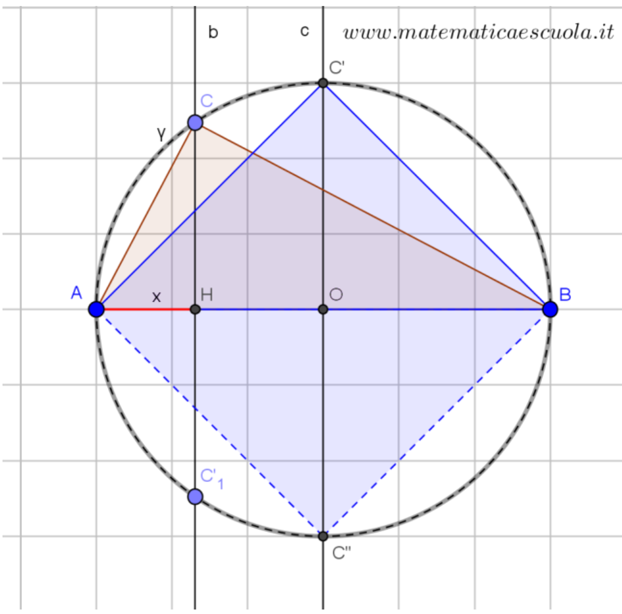

Figura 1- Al variare del punto C sulla circonferenza di diametro AB la sua proiezione ortogonale H sul diametro descrive il diametro. I triangoli di area massima si ottengono quando H coincide con il centro O della circonferenza.

Osservazione

Esistono due triangoli aventi area massima. In figura sono ABC′, ABC′′. Posto $\overline{AB}=2r$ il valore dell’area massima è $S_{max}(ABC)=r^2$.

Risoluzione del problema con gli strumenti dell’analisi matematica

Indichiamo con x la misura della proiezione AH del cateto AC sull’ipotenusa. Risulta $0\le x\le 2r$, $\overline{HB}=2r-x$. Dal secondo teorema di Euclide applicato al triangolo ABC si ricava la misura dell’altezza CH: $\overline{CH}=\sqrt{\overline{AH}\cdot\overline{HB}}=\sqrt{x(2r-x)}$. L’area del triangolo ABC vale

$$S(ABC)=S(x)=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CH}}{2}=r\cdot\sqrt{x(2r-x)}\,.$$

Si deve determinare il massimo della funzione S(x), con $x\in$[0;2r]. La funzione è continua e definita in un intervallo chiuso e limitato, quindi per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo. Determiniamo la funzione derivata prima e studiamone segno e zeri.

$S'(x)=\dfrac{r(r-x)}{\sqrt{x(2r-x)}}$ Questa funzione esiste con $0<x<2r$. Risulta

$S'(x)>0$ per $0<x<r$; $S'(x)=0$ per $x=r$; $S'(x)<0$ per $r<x<2r$. Pertanto la funzione area S(x) è strettamente crescente nell'intervallo]0;r[, strettamente decrescente nell'intervallo]r;2r[e quindi nel punto x = r assume il suo massimo (assoluto) che vale

$$S_{max}=S(r)=r\cdot\sqrt{r(2r-r)}=r^2\,.$$

Con x=r il punto H coincide con il centro della circonferenza, quindi il triangolo ABC è isoscele.

Esistono due triangoli inscritti nella circonferenza con queste caratteristiche che sono ABC′ e ABC″.

*** ***

Problema_2

Consideriamo nella circonferenza di diametro AB la corda PQ parallela ad AB e siano C, C_1 gli estremi del diametro perpendicolare ad AB. Consideriamo il triangolo isoscele PQC; poniamo uguale ad x la misura dell'altezza relativa alla base PQ: $\overline{CH}=x$. Dobbiamo determinare per quale posizione della base PQ la funzione somma $f(x)=\overline{PQ}+\overline{CH}$ assume valore massimo.

Congiungiamo Q con C_1 e osserviamo che il triangolo CQC_1 è rettangolo in Q. La misura della proiezione del cateto QC_1 sull'ipotenusa è $\overline{HC_1}=2r-\overline{CH}=2r-x$

e applicando il secondo teorema di Euclide si ricava la misura di HQ.

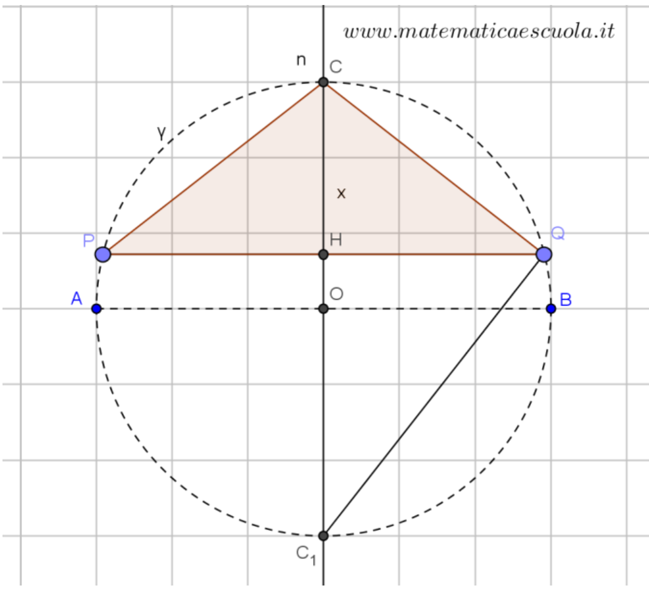

Figura 2- Problema_2. Stabilire per quale posizione della corda PQ la somma PQ+CH assume valore massimo.

$$\overline{HQ}=\sqrt{\overline{CH}\cdot\overline{HC_1}}=\sqrt{x\cdot(2r-x)}$$

La funzione da massimizzare è

$f(x)=2\overline{HQ}+\overline{CH}=2\sqrt{x\cdot(2r-x)}+x$, con $0\le x\le 2r$.

Osserviamo che la funzione è continua e l'intervallo in cui si considera è chiuso e limitato, quindi ammette senz'altro massimo e minimo (teorema di Weierstrass). Determiniamo la funzione derivata prima e studiamone segno e zeri.

$$f'(x)=\frac{2r-2x+\sqrt{x\cdot(2r-x)}}{2\sqrt{x\cdot(2r-x)}}$$

La funzione $f'(x)$ esiste per $0<x<2r$, inoltre il denominatore per detti valori è strettamente positivo, quindi il segno della frazione è determinato esclusivamente dal segno del numeratore.

Vediamo intanto dove si annulla: $f'(x)=0$.

$2r-2x+\sqrt{x\cdot(2r-x)}=0 \rightarrow \sqrt{x\cdot(2r-x)}=2(x-r)$. Poiché il primo membro è non negativo, deve esserlo anche il secondo membro e ciò si verifica per $x \geq r$. Con questa condizione elevando al quadrato i due membri e semplificando si ricava:

$5x^2-10rx+4r^2=0$, le cui radici sono $x=\frac{r(5\pm\sqrt{5})}{5}$, $x_1=\frac{r(5-\sqrt{5})}{5}<r$, $x_2=\frac{r(5+\sqrt{5})}{5}$ e risulta $r<x_2<2r$. La derivata prima si annulla solo nel punto x_2.

Studiando il segno del numeratore della frazione rappresentativa della derivata prima si ha

$2r-2x+\sqrt{x\cdot(2r-x)}>0$, da cui $\sqrt{x\cdot(2r-x)}>2(x-r)$

Questa disuguaglianza è senz'altro soddisfatta per $0<x\leq r$ e per $x>r$ la disuguaglianza è equivalente alla disequazione

$5x^2-10rx+4r^2<0$, verificata per $r<x<\frac{r(5+\sqrt{5})}{5}$.

Si conclude che la funzione derivata prima è positiva per $0<x<\frac{r(5+\sqrt{5})}{5}$ e negativa per $\frac{r(5+\sqrt{5})}{5}<x<2r$, dunque il punto $x=\frac{r(5+\sqrt{5})}{5}\simeq 1{,}447r$ è di massimo (assoluto) per la funzione. Il valore massimo della funzione è

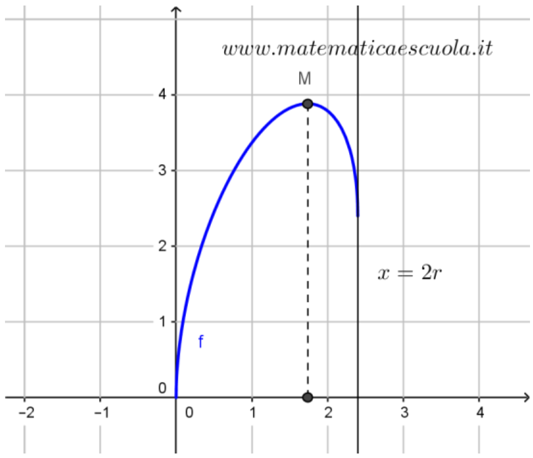

Figura 3- Il diagramma è quello della funzione f(x)=PQ+CH, con CH=x, dove PQ e CH sono la base e l'altezza del triangolo isoscele PQC della Figura 2.

$$Max=f\left(\frac{r(5+\sqrt{5})}{5}\right)=r\left(\sqrt{5}+1\right)$$

In Figura 3 si può osservare il diagramma della funzione somma delle misure dei due segmenti.