Ottimizzazione: due problemi di massimo sulla circonferenza

Problema_1 Fra tutti i triangoli rettangoli che hanno la stessa ipotenusa determinare quello di area massima.

Problema_2 Considerare una circonferenza di raggio r e inscrivervi un triangolo isoscele. Tra tutti i triangoli isosceli che si possono inscrivere determinare quello per il quale la somma della base e della relativa altezza è massima.

Elaborazioni

Problema_1

Risoluzione del problema con considerazioni geometriche

1) Ricordiamo che ogni triangolo rettangolo è inscrivibile in una semicirconferenza avente l'ipotenusa come diametro. Ciò premesso, fissato il segmento AB che rappresenta l'ipotenusa comune a tutti i triangoli rettangoli in oggetto, il vertice C dell'angolo retto deve trovarsi sulla circonferenza di diametro AB.

…

Osservazione

Esistono due triangoli aventi area massima.

…

Risoluzione del problema con gli strumenti dell'analisi matematica

Indichiamo con x la misura della proiezione AH del cateto AC sull'ipotenusa. Risulta $0 \le x \le 2r$, $\overline{HB} = 2r - x$. Dal secondo teorema di Euclide applicato al triangolo ABC si ricava la misura dell'altezza CH: $\overline{CH} = \sqrt{\overline{AH} \cdot \overline{HB}} = \sqrt{x(2r-x)}$. L'area del triangolo ABC vale

$$S(ABC) = S(x) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = r \cdot \sqrt{x(2r-x)}\,.$$

Si deve determinare il massimo della funzione S(x),

…

*** ***

Problema_2

Consideriamo nella circonferenza di diametro AB la corda PQ parallela ad AB e siano C, C_1 gli estremi del diametro perpendicolare ad AB. Consideriamo il triangolo isoscele PQC; poniamo uguale ad x la misura dell'altezza relativa alla base PQ: $\overline{CH} = x$. Dobbiamo determinare per quale posizione della base PQ la funzione somma $f(x) = \overline{PQ} + \overline{CH}$ assume valore massimo.

….

Il valore massimo della funzione è

$$Max = f\left(\frac{r\left(5+\sqrt{5}\right)}{5}\right) = r\left(\sqrt{5}+1\right)$$

In Figura 3 si può osservare il diagramma della funzione somma delle misure dei due segmenti.