

Ottimizzazione: problema di massimo e di minimo

Problema - Considerato un filo di lunghezza l , dividerlo in due parti in modo che le parti ottenute diventino i bordi di due quadrati per i quali la somma delle aree sia minima. Successivamente si affronti l'analogo problema determinando quale suddivisione del filo permette di delimitare con le due parti suddette due quadrati la somma delle cui aree sia massima.

Elaborazioni

Prima parte

Indicando con x ed $l-x$ le misure delle due parti in cui resta diviso il filo, con $0 \leq x \leq l$, le aree dei due quadrati in questione valgono

$$S_1(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2, \quad S_2(x) = \left(\frac{l-x}{4}\right)^2,$$

$$\text{e l'area totale è } S(x) = S_1(x) + S_2(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(l-x)^2}{16} = \frac{1}{16}(2x^2 - 2lx + l^2)$$

Si deve determinare il valore di x per cui la funzione $S(x)$ assume il suo minimo.

Osserviamo intanto che la funzione ottenuta $S(x)$, definita nell'intervallo $[0; l]$, è un polinomio intero, quindi è continua e per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo. Ora siamo alla ricerca di x che rende minima la funzione.

Individuazione della soluzione con la geometria analitica

La forma algebrica $y=S(x)$ ha come grafico una parabola con la concavità rivolta verso l'alto e la funzione assume il suo minimo nel punto dell'ascissa del vertice, quindi per

$$x = \frac{2l}{4} = \frac{l}{2}. \text{ Il valore del minimo coincide}$$

con l'ordinata del vertice ed è

$$\min = S\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{l^2}{32}.$$

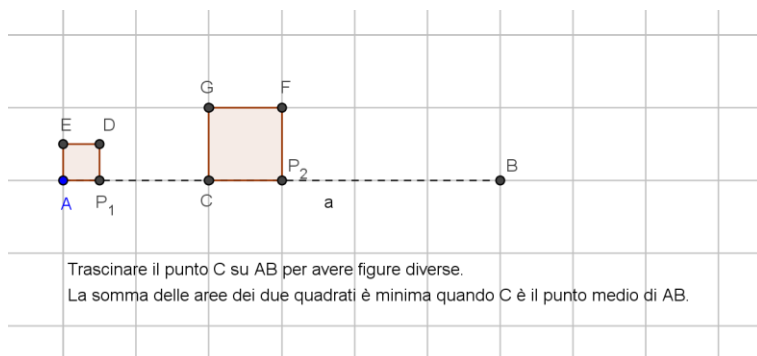


Figura 1-Il segmento $AB=a$ rappresenta il filo disponibile: $AC=x$ e $AP_1=x/4$; $CB=a-x$ e $CP_2=(a-x)/4$.

Individuazione della soluzione con gli strumenti dell'analisi matematica

Determiniamo la derivata prima della funzione $S(x)$ e studiamone segno e zeri.

$$S'(x) = \frac{1}{16}(4x - 2l) \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{l}{2}.$$

La funzione $S(x)$ è strettamente

decrescente per $0 \leq x < \frac{l}{2}$, strettamente

crescente per $\frac{l}{2} < x \leq l$, dunque il punto

$x = \frac{l}{2}$ è di minimo relativo, nonché

assoluto. Risulta, ovviamente, $S\left(\frac{l}{2}\right) =$

$$\frac{l^2}{32}.$$

Osservazione

La somma delle aree dei due quadrati è minima solo se il filo viene tagliato a metà, dunque solo se i due quadrati sono congruenti (Figura 2).

Seconda parte

Per la ricerca del valore di x per cui la somma delle aree dei due quadrati è massima si deve

semplicemente determinare il valore del massimo della funzione $S(x)$ trovata sopra. Poiché la funzione ammette il solo punto di minimo $x=l/2$ nell'intervallo di definizione $[0; l]$, possiamo già affermare che il massimo sarà assunto in uno degli estremi dell'intervallo (eventualmente in entrambi gli estremi). Calcoliamo dunque la funzione agli estremi dell'intervallo e confrontiamone i valori ottenuti.

$$S(0) = \frac{l^2}{16}; \quad S(l) = \frac{l^2}{16}.$$

I valori sono uguali, dunque la funzione assume il suo massimo in $x=0$ e in $x=l$ ⁽¹⁾.

Osservazione

Si osservi che i due valori trovati $x=0$, $x=l$ indicano che il valore massimo per l'area si ottiene costruendo con il filo un solo quadrato: infatti, uno deve avere perimetro zero e l'altro l .

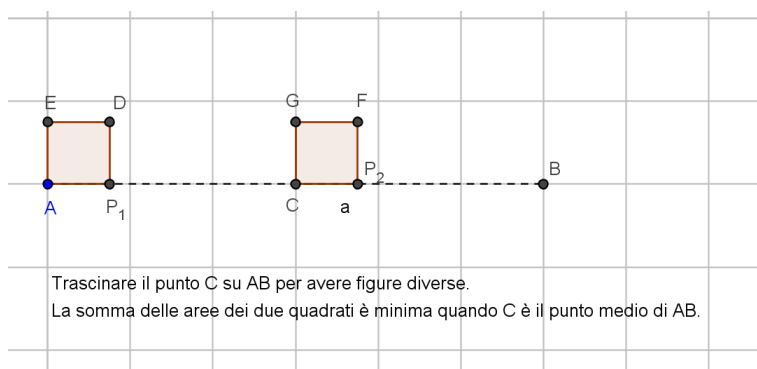


Figura 2- In figura sono rappresentati i due quadrati congruenti, la somma delle cui aree è minima: $AC=CB=a/2$.

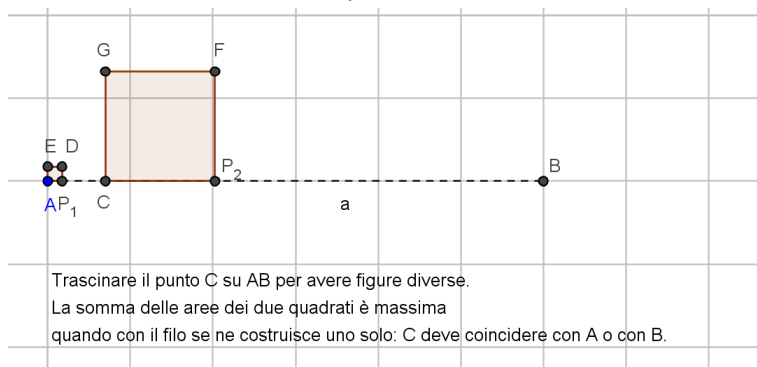


Figura 3- La figura rappresenta due quadrati la somma delle cui aree è vicina al valore massimo. Il quadrato più piccolo ha lato di misura $7a/240$.

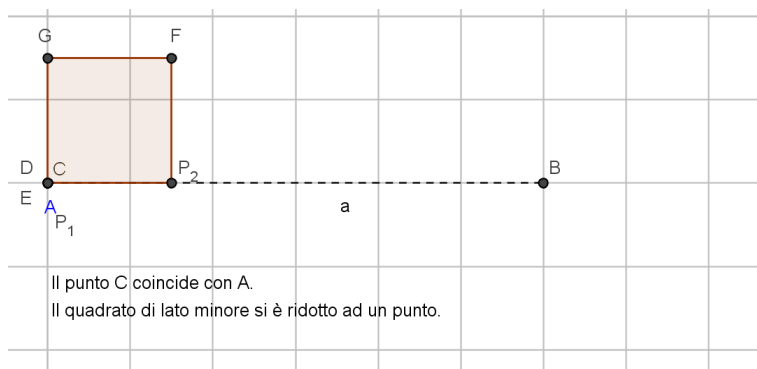


Figura 4- In questa figura un quadrato ha lato nullo e l'altro lato $CP_2=a/4$. Nell'estremo A si sovrappongono i cinque punti A, P₁, D, E, C visibili in Figura 3.

⁽¹⁾ Il problema in esame è di natura simmetrica