

Esercizi sul teorema di Rolle

(Funzioni irrazionale, goniometrica, esponenziale)

Esercizio 1

Riconoscere che la funzione $f(x) = x\sqrt{3-x}$ nell'intervallo $[0;3]$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle e determinare il conseguente punto $x=c$ previsto nel teorema.

Risposta: $f'(x) = \frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$; $c = 2$.

Elaborazioni

La funzione, irrazionale intera, è definita nell'intervallo $]-\infty;3]$ ed è ivi continua. Agli estremi dell'intervallo $[0;3]$ si annulla, dunque $f(0)=f(3)$.

Per quanto concerne la derivabilità risulta

$f'(x) = \frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$, quindi la funzione è derivabile in

ogni punto del dominio diverso da 3, perciò lo è internamente all'intervallo in esame.

Le ipotesi previste nel teorema di Rolle sono tutte soddisfatte. All'interno dell'intervallo $[0;3]$ la derivata prima si annulla in $x=2$ e questo è il punto c previsto nella tesi del teorema.

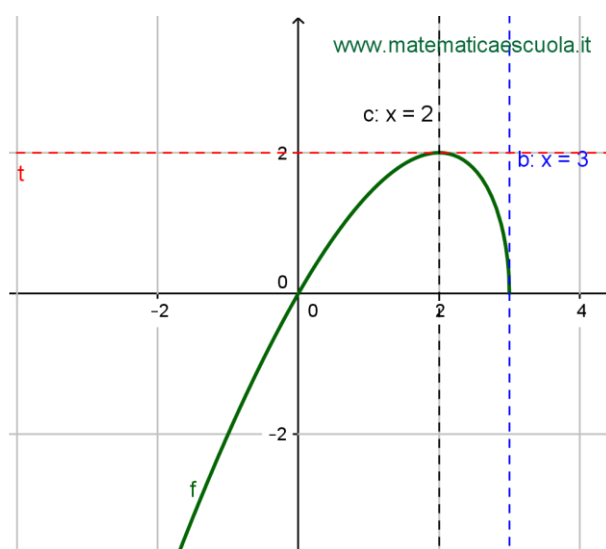


Figura 1

*** **

Esercizio 2

Considerata la funzione goniometrica $f(x) = \sin\left(ax + \frac{\pi}{3}\right)$, determinare per quali valori del parametro a

la stessa verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$. Riconosciuto che esistono infinite

funzioni che verificano nell'intervallo le ipotesi del suddetto teorema scegliere tra quelle individuate quella corrispondente al valore del parametro avente modulo minore e diverso da zero, quindi determinare il corrispondente punto c previsto nel teorema. Rappresentare la funzione in un intervallo di ampiezza pari al suo periodo.

Risposte: $a=2$; $c = \frac{\pi}{12}$

La funzione è trascendente goniometrica, definita e derivabile su tutto l'asse reale. Per la determinazione della costante dobbiamo imporre che la funzione agli estremi dell'intervallo assuma lo stesso valore.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(a \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = f(0) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'uguaglianza si verifica per i valori del parametro tali che

$$\left(a \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \vee \left(a \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \rightarrow (a = 12k, k \in \mathbb{Z}) \vee (a = 2 + 12k, k \in \mathbb{Z}).$$

Esistono dunque infinite funzioni che verificano nell'intervallo assegnato le ipotesi del teorema di Rolle.

Il valore da assegnare al parametro avente modulo minore e diverso da zero è $a=2$ e la funzione corrispondente è

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

La funzione ha periodo $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Determinazione dei punti interni all'intervallo

$\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ in cui si annulla la derivata prima.

$$f'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \rightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

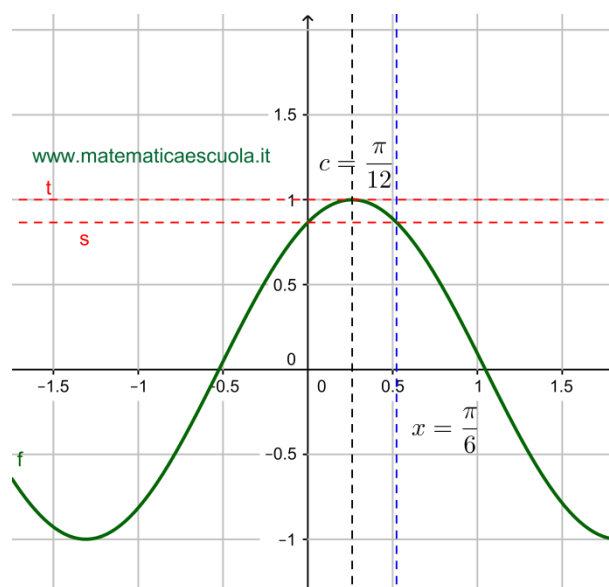


Figura 2

Dei punti indicati solo $x = \frac{\pi}{12}$ è interno all'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ e pertanto esiste un solo punto che verifica internamente all'intervallo la tesi del teorema di Rolle.

*** **

Esercizio 3

Considerata la funzione $f(x) = \frac{e^{-x} + 1}{e^x + k}$, determinare per quale valore del parametro k la funzione verifica nell'intervallo $[-1; 0]$ le ipotesi del teorema di Rolle. Per il valore trovato riconoscere che nell'intervallo considerato esiste un solo punto c che verifica la tesi del suddetto teorema.

Risposta: $k = -1 - 2e^{-1}$; $c = \ln(\sqrt{2 + 2e^{-1}} - 1)$

La funzione è trascendente esponenziale, definita e derivabile su tutto l'asse reale. Per la determinazione della costante dobbiamo imporre che la funzione agli estremi dell'intervallo assuma lo stesso valore. Risulta

$$f(-1) = \frac{e+1}{e^{-1}+k}, \quad f(0) = \frac{2}{1+k}, \quad \text{quindi } k \text{ deve verificare l'uguaglianza}$$

$$\frac{e+1}{e^{-1}+k} = \frac{2}{1+k}, \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} (e+1)(k+1) = 2(e^{-1}+k) \\ (k \neq -1) \wedge (k \neq -e^{-1}) \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione ottenuta.

$$ek + e + k + 1 = 2e^{-1} + 2k \rightarrow k(e-1) = 2e^{-1} - e - 1 \rightarrow k = \frac{2e^{-1} - e - 1}{e-1} = -\frac{e^2 + e - 2}{e(e-1)} = -\frac{(e-1)(e+2)}{e(e-1)} = -1 - 2e^{-1}$$

Il valore trovato rispetta le condizioni imposte $(k \neq -1) \wedge (k \neq -e^{-1})$, dunque è accettabile.

La funzione in oggetto è

$$f(x) = \frac{e^{-x} + 1}{e^x - 1 - 2e^{-1}}$$

Determiniamo ora il punto $x=c$ interno all'intervallo $[-1;0]$ previsto nella tesi del teorema di Rolle in cui si annulla la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(e^x - 1 - 2e^{-1}) - (e^{-x} + 1) \cdot e^x}{(e^x - 1 - 2e^{-1})^2} =$$

$$\frac{-1 + e^{-x} + 2e^{-x-1} - 1 - e^x}{(e^x - 1 - 2e^{-1})^2} = \frac{2e^{-x-1} + e^{-x} - e^x - 2}{(e^x - 1 - 2e^{-1})^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-x-1} + e^{-x} - e^x - 2 = 0 \rightarrow$$

$$2e^{-1}e^{-x} + e^{-x} - e^x - 2 = 0, \quad \text{con } e^x = t \text{ si ottiene}$$

$$\frac{2e^{-1}}{t} + \frac{1}{t} - t - 2 = 0 \rightarrow t^2 + 2t - 2e^{-1} - 1 = 0 \rightarrow$$

$$t_2^1 = -1 \pm \sqrt{2 + 2e^{-1}}, \quad \text{da cui}$$

$$t_1 = -1 - \sqrt{2 + 2e^{-1}} < 0, \quad \text{questo valore non può essere accettabile perché } t = e^x > 0;$$

$$t_2 = -1 + \sqrt{2 + 2e^{-1}} \approx 0,654, \quad \text{questo valore è accettabile. Tornando alla variabile } x \text{ abbiamo}$$

$$e^x = \sqrt{2 + 2e^{-1}} - 1, \quad \text{da cui } x = \ln(\sqrt{2 + 2e^{-1}} - 1) \approx -0,424; \quad \text{questo è il valore del punto } c \text{ interno all'intervallo}$$

previsto nella tesi del teorema di Rolle.

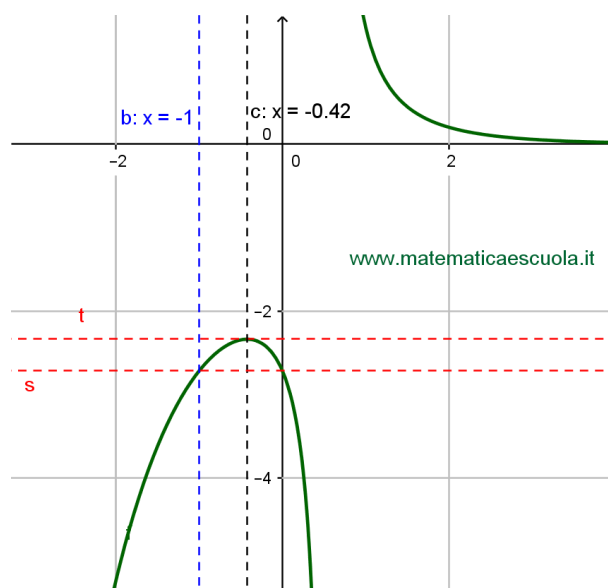


Figura 3