

Esercizi sul teorema di Rolle

(per due funzioni razionali)

Esercizio 1

- a) Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x) = ax^2 + bx$ si determinino i valori dei parametri a, b in modo che la funzione verifichi le ipotesi del teorema di Rolle relativamente all'intervallo $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$.
- b) Riconosciuto che esistono infinite funzioni che soddisfano le suddette ipotesi nell'intervallo assegnato le quali ammettono un solo punto c che verifica la tesi del teorema, determinare la particolare funzione f che verifica l'ulteriore proprietà $f(c) = c$.

Risposte a) $b = \frac{1}{2}a$, b) $f(x) = 4x^2 + 2x$

Elaborazioni

- a) La funzione considerata, quali che siano i valori assegnati ai parametri a, b , è continua e derivabile su tutto l'asse, pertanto affinché la stessa soddisfi tutte le ipotesi previste nel teorema di Rolle nell'intervallo $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ si deve imporre solo che la funzione assuma agli estremi dell'intervallo lo stesso valore. Dunque deve risultare:

$f(-1) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, da cui $a - b = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b \rightarrow b = \frac{1}{2}a$. Esiste dunque la classe di funzioni razionali

$$f(x) = ax^2 + \frac{1}{2}ax, \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (1)$$

che soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle dell'intervallo in oggetto.

- b) I punti c previsti nella tesi del teorema di Rolle sono quei punti interni all'intervallo in cui la derivata prima della funzione si annulla. Risolviamo dunque l'equazione

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2ax + \frac{1}{2}a = 0$$

Quest'equazione con $a=0$ è soddisfatta da ogni x reale. Si tratta della funzione costante $f(x) = 0$ che soddisfa ovviamente le caratteristiche previste nel teorema di Rolle nell'intervallo assegnato; in questo caso in ogni punto x del suddetto intervallo (interno e non) la derivata prima si annulla e quindi esistono infiniti punti c tali che $f'(c) = 0$. Si osservi che ciò non contrasta con la tesi del teorema in cui si afferma "...se sono soddisfatte le ipotesi...allora **esiste almeno** un punto c interno all'intervallo tale che $f'(c) = 0$ ".

Con $a \neq 0$ l'equazione è soddisfatta solo da $x = -1/4$, che rappresenta il punto medio dell'intervallo, dunque $c = -1/4$.

Ricerca della particolare funzione tale che $f(c)=c$

Per le funzioni della forma (1), essendo $c = -\frac{1}{4}$, si deve verificare l'uguaglianza

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}, \text{ quindi } \frac{1}{16}a - \frac{1}{8}a = -\frac{1}{4}, \text{ da cui } a = 4.$$

La funzione richiesta è $f(x) = 4x^2 + 2x$.

L'equazione $y = f(x)$, cioè $y = 4x^2 + 2x$, rappresenta nel piano cartesiano una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate e vertice nel punto $V\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$.

Facciamo notare espressamente che il vertice è l'unico punto del grafico della funzione in cui la tangente è parallela all'asse delle ascisse.

In Figura 1 è rappresentata la funzione e si può riscontrare anche che $f(-1)=f(1/2)=2$.

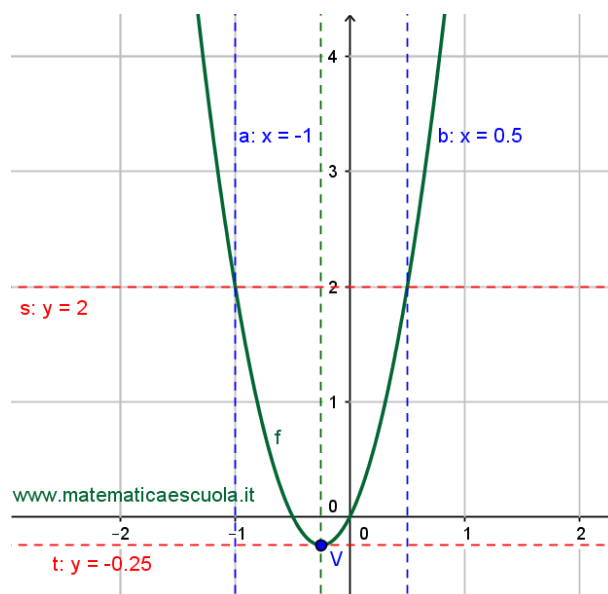


Figura 1

*** **

Esercizio 2

Riconoscere che la funzione $f(x) = \frac{1-x^2}{x-4}$ nell'intervallo $[5;19]$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle e che esiste un solo punto c interno all'intervallo che verifica la tesi del teorema.

Risposta: $c = 4 + \sqrt{15}$

Elaborazioni

La funzione è razionale fratta, è definita e derivabile nel dominio $D = \mathbb{R} - \{4\}$, dunque è senz'altro continua in $[5;19]$ e derivabile all'interno dell'intervallo come richiede il teorema di Rolle. Rimane da verificare che la funzione assume lo stesso valore agli estremi dell'intervallo indicato.

$$f(5) = \frac{1-25}{5-4} = -24; \quad f(19) = \frac{1-361}{19-4} = \frac{-360}{15} = -24.$$

La funzione verifica tutte le ipotesi del teorema di Rolle. Determiniamo la derivata prima e risolviamo l'equazione $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 8x - 1}{(x-4)^2} = 0 \text{ da cui } x^2 - 8x + 1 = 0 \rightarrow x = 4 \pm \sqrt{15}.$$

Dei due punti trovati, $x_1 = 4 - \sqrt{15}$ non appartiene all'intervallo in esame; $x_2 = 4 + \sqrt{15} \approx 7,87$ è interno all'intervallo e rappresenta il punto c previsto dal teorema di Rolle.

In Figura 2 è rappresentata la funzione con indicazioni particolari sul suo comportamento nell'intervallo $[5;19]$. Si osservi che la stessa agli estremi dell'intervallo assume il valore -24 e il suo grafico nel punto di ascissa $x = 4 + \sqrt{15} \approx 7,87$ ammette retta tangente parallela all'asse delle ascisse.

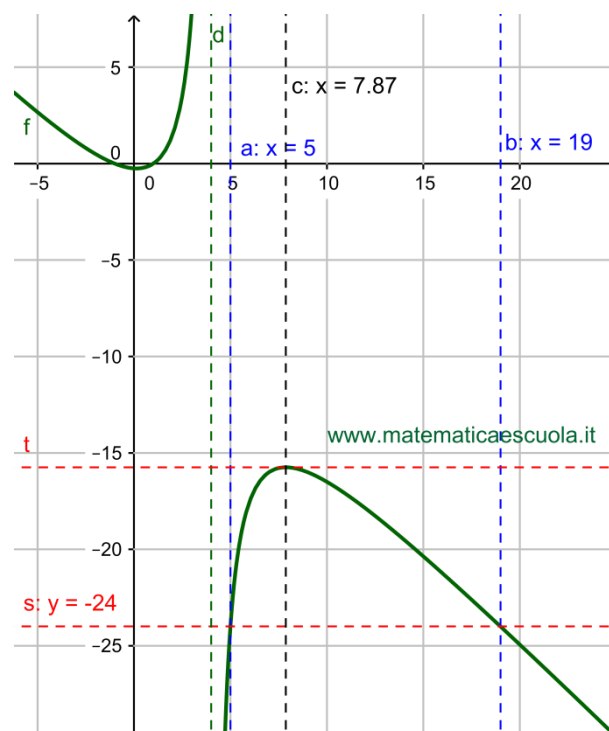


Figura 2