

Esercizi sul teorema di Rolle

Esercizio 1

- a) Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x) = ax^2 + bx$ si determinino i valori dei parametri a, b in modo che la funzione verifichi le ipotesi del teorema di Rolle relativamente all'intervallo $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$.
- b) Riconosciuto che esistono infinite funzioni che soddisfano le suddette ipotesi nell'intervallo assegnato le quali ammettono un solo punto c che verifica la tesi del teorema, determinare la particolare funzione f che verifica l'ulteriore proprietà $f(c) = c$.

Risposte a) $b = \frac{1}{2}a$, b) $f(x) = 4x^2 + 2x$

Esercizio 2

Riconoscere che la funzione $f(x) = \frac{1-x^2}{x-4}$ nell'intervallo $[5;19]$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle e che esiste un solo punto c interno all'intervallo che verifica la tesi del teorema.

Risposta: $c = 4 + \sqrt{15}$

Esercizio 3

Riconoscere che la funzione $f(x) = x\sqrt{3-x}$ nell'intervallo $[0;3]$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle e determinare il conseguente punto $x=c$ previsto nel teorema.

Risposta: $c=2$.

Esercizio 4

Considerata la funzione goniometrica $f(x) = \sin\left(ax + \frac{\pi}{3}\right)$, determinare per quali valori del parametro a

la stessa verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$. Riconosciuto che esistono infinite

funzioni che verificano nell'intervallo le ipotesi del suddetto teorema scegliere tra quelle individuate quella corrispondente al valore del parametro avente modulo minore e diverso da zero, quindi determinare il corrispondente punto c previsto nel teorema. Rappresentare la funzione in un intervallo di ampiezza pari al suo periodo.

Risposte: $a=2$; $c = \frac{\pi}{12}$

Esercizio 5

Considerata la funzione $f(x) = \frac{e^{-x} + 1}{e^x + k}$, determinare per quale valore del parametro k la funzione verifica nell'intervallo $[-1;0]$ le ipotesi del teorema di Rolle. Per il valore trovato riconoscere che nell'intervallo considerato esiste un solo punto c che verifica la tesi del suddetto teorema.

Risposta: $k = -1 - 2e^{-1}$; $c = \ln\left(\sqrt{2 + 2e^{-1}} - 1\right)$