

Esercitazione

Geometria analitica della parabola, della retta e calcolo integrale

Problema

Considerato in un piano cartesiano il fascio di parabole $F: y = kx^2$ e la retta $s: y = x + 1$ si risolvano i seguenti quesiti.

Q1- Determinare i valori del parametro k per i quali le corrispondenti parabole staccano sulla retta s segmenti di misura unitaria.

Q2- Determinare la parabola λ del fascio tangente alla retta s .

Q3- Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola λ , dalla retta s e dall'asse delle ascisse.

Elaborazioni

Q1- Osserviamo che dall'equazione del fascio si ottengono parabole non degeneri solo con $k \neq 0$. Ciò premesso, impostiamo il sistema di secondo grado con le equazioni della generica parabola del fascio e della retta s e precisiamo per quali valori del parametro esso ammette due soluzioni distinte, che saranno le coordinate dei punti P_1 e P_2 di intersezione tra la parabola e la retta, successivamente imporranno la condizione che la misura del segmento P_1P_2 valga uno per trovare i corrispondenti valori del parametro.

$$\begin{cases} s: y = x + 1 \\ F: y = kx^2 \end{cases} \rightarrow kx^2 = x + 1 \rightarrow kx^2 - x - 1 = 0. \text{ Il discriminante di quest'equazione deve essere positivo}$$

affinché la parabola intersechi la retta in due punti distinti. Dunque $\Delta = 1 + 4k > 0$, quindi deve risultare

$$k > -\frac{1}{4}, \text{ e come detto } k \neq 0. \text{ Le due radici dell'equazione sono } x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4k}}{2k}, \quad x_1 = \frac{1 - \sqrt{1+4k}}{2k},$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{1+4k}}{2k}, \text{ che rappresentano le ascisse dei punti di intersezione. Le corrispondenti ordinate sono}$$

$$y_1 = \frac{1 - \sqrt{1+4k}}{2k} + 1, \quad y_2 = \frac{1 + \sqrt{1+4k}}{2k} + 1.$$

$$\text{I due punti di intersezione sono } P_1 \left(\frac{1 - \sqrt{1+4k}}{2k}; \frac{1 - \sqrt{1+4k}}{2k} + 1 \right), \quad P_2 \left(\frac{1 + \sqrt{1+4k}}{2k}; \frac{1 + \sqrt{1+4k}}{2k} + 1 \right).$$

Misura del segmento P_1P_2

$$\begin{aligned} \overline{P_1P_2} &= \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{1+4k}}{2k} - \frac{1 - \sqrt{1+4k}}{2k} \right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{1+4k}}{2k} - \frac{1 - \sqrt{1+4k}}{2k} \right)^2} = \sqrt{2 \left(\frac{\sqrt{1+4k}}{k} \right)^2} = \sqrt{2 \left(\frac{1+4k}{k^2} \right)} = \\ &= \frac{1}{|k|} \cdot \sqrt{2(1+4k)} \end{aligned}$$

Condizione $\overline{P_1P_2} = 1 \rightarrow \frac{1}{|k|} \cdot \sqrt{2(1+4k)} = 1 \rightarrow \frac{2(1+4k)}{k^2} = 1$. Quest'equazione, con $k \neq 0$, è equivalente alla

seguito $k^2 - 8k - 2 = 0$, le cui radici sono

$$k = 4 \pm \sqrt{18} = 4 \pm 3\sqrt{2}, \quad k_1 = 4 - 3\sqrt{2}, \quad k_2 = 4 + 3\sqrt{2}.$$

Esistono pertanto due parabole del fascio che verificano la condizione richiesta e sono

$$\lambda_1: y = (4 - 3\sqrt{2})x^2, \quad \lambda_2: y = (4 + 3\sqrt{2})x^2$$

In Figura 1 sono rappresentate le due parabole e indicati i segmenti di misura unitaria staccati dalle stesse sulla retta s .

Q2- Per trovare la parabola del fascio tangente alla retta s si deve imporre che il sistema formato dall'equazione del fascio e dall'equazione della retta abbia soluzioni coincidenti, ciò si verifica se e solo se il discriminante dell'equazione risolvente è nullo.

$$\Delta = 1 + 4k = 0 \rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

La parabola cercata è $\lambda: y = -\frac{1}{4}x^2$.

Q3- Il calcolo dell'area della regione piana in oggetto si può eseguire in diversi modi. Qui, considerato che il presente esercizio è dedicato alla preparazione degli Esami di Stato di Liceo Scientifico, seguiremo un metodo veloce sfruttando gli integrali definiti.

Consideriamo dunque il punto T di contatto tra la parabola $\lambda: y = -\frac{1}{4}x^2$ e la retta s . Il punto è $T(-2; -1)$.

Consideriamo altresì i punti $E(-1; 0)$, $F(-2; 0)$.

Notiamo che l'area S della regione piana oggetto della nostra attenzione è data dalla differenza tra l'area S_1 della regione piana delimitata dalla parabola e dall'asse delle ascisse relativamente all'intervallo $[-2; 0]$ e l'area S_2 del triangolo rettangolo isoscele EFT .

Risulta:

$$S_1 = \int_{-2}^0 -\left(-\frac{1}{4}\right)x^2 dx = \left[\frac{x^3}{12}\right]_{-2}^0 = \frac{2}{3};$$

$$S_2 = \text{Area}(EFT) = \frac{\overline{FE} \cdot \overline{TF}}{2} = \frac{1}{2}.$$

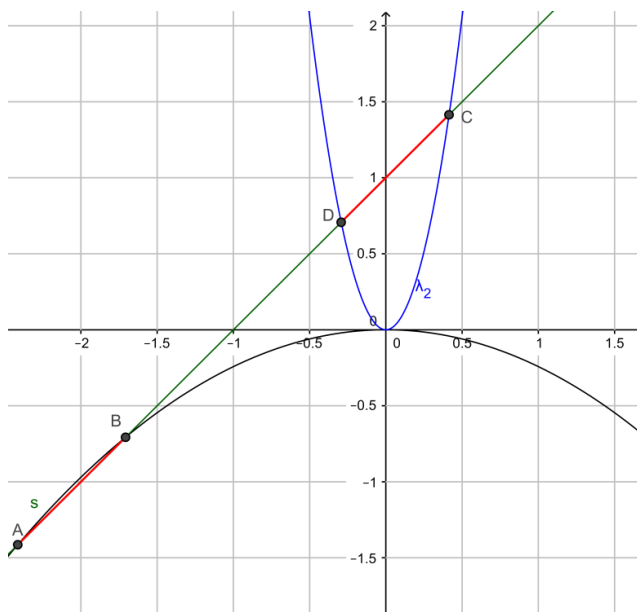


Figura 1

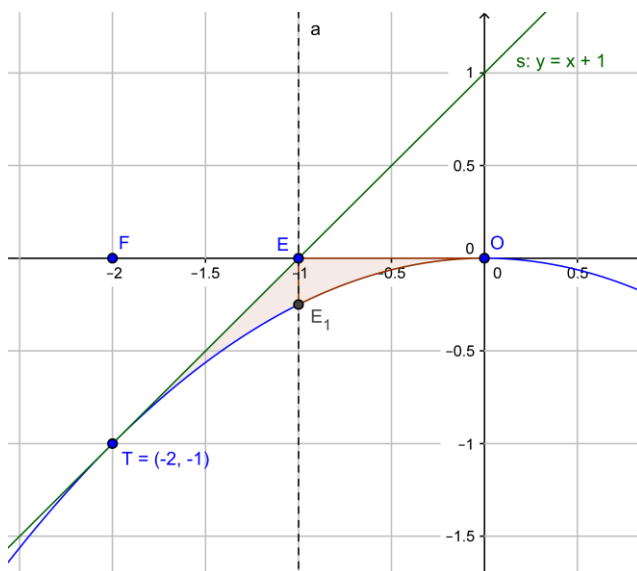


Figura 2

In conclusione si ha

$$S = S_1 - S_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Proposta di esercitazione per il lettore

Il lettore verifichi che il valore dell'area della regione piana considerata può essere anche ottenuto eseguendo il calcolo di seguito indicato e lo si invita a giustificare l'espressione utilizzata.

$$S = \int_{-2}^{-1} \left(x + 1 - \left(-\frac{1}{4}x^2 \right) \right) dx + \int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{4}x^2 \right) dx = \dots = \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$$