

Esercitazione sulla verifica del teorema di Lagrange

Stabilire se le funzioni di seguito indicate verificano nell'intervallo assegnato le ipotesi del teorema di Lagrange e in caso affermativo determinare il punto x_0 previsto nello stesso teorema.

- a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, con $x \in [-1; 2]$ $\left[x_0 = \frac{1}{2} \right]$
- b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$, con $x \in [-1; 4]$ $\left[x_1 = \frac{6 - \sqrt{21}}{3}; x_2 = \frac{6 + \sqrt{21}}{3} \right]$
- c) $f(x) = \sqrt{x-2}$, con $x \in [2; 6]$ $[x = 3]$
- d) $f(x) = \frac{1}{x-3}$, con $x \in [-2; -1]$ $\left[x_0 = 3 - 2\sqrt{5} \right]$
- e) $f(x) = \frac{1}{x-3}$, con $x \in [2; 4]$ [Non esiste alcun punto]
- f) $f(x) = x\sqrt{x+1}$, con $x \in [-1; 3]$ $\left[x_0 = \frac{\sqrt{21}-1}{6} \right]$

Elaborazioni

Ricordiamo l'enunciato del teorema di Lagrange.

Teorema

Considerata una funzione reale di variabile reale definita nell'intervallo $[a; b]$, che sia continua in tutto l'intervallo e derivabile all'interno dello stesso, esiste almeno un punto x_0 interno all'intervallo in cui si verifica la seguente uguaglianza:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, con $x \in [-1; 2]$

La funzione in esame è un polinomio, è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è derivabile in tutto il suo dominio. Sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange. Risulta

$$f'(x) = x - 2; \quad f(-1) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}; \quad f(2) = 2 - 4 = -2; \quad \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{-2 - \frac{5}{2}}{3} = -\frac{3}{2}.$$

Si deve risolvere l'equazione $f'(x) = -\frac{3}{2}$ e riscontrare che ammette una radice interna all'intervallo $[-1; 2]$.

$$x - 2 = -\frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Risulta $-1 < \frac{1}{2} < 2$; il punto $x_0 = \frac{1}{2}$ è quello previsto dal teorema di Lagrange ed è unico.

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$, con $x \in [-1; 4]$

La funzione verifica le ipotesi del teorema. Risulta

$$f(-1) = -\frac{1}{3} - 2 = -\frac{7}{3}; \quad f(4) = \frac{64}{3} - 32 = -\frac{32}{3};$$

$$\frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{-\frac{32}{3} + \frac{7}{3}}{5} = -\frac{5}{3}$$

Essendo $f'(x) = x^2 - 4x$, risolviamo l'equazione

$$f'(x) = -\frac{5}{3} \rightarrow x^2 - 4x = -\frac{5}{3} \\ \rightarrow 3x^2 - 12x + 5 = 0$$

L'equazione ammette come radici $x = \frac{6 \pm \sqrt{21}}{3}$,

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{21}}{3} \approx 0,472 \text{ e } x_2 = \frac{6 + \sqrt{21}}{3} \approx 3,528.$$

Entrambi i valori sono interni all'intervallo di ricerca, quindi il teorema di Lagrange è soddisfatto dalla funzione in due distinti punti. In Figura 1 è rappresentata la funzione insieme alla corda AB che unisce i punti del grafico corrispondenti agli estremi dell'intervallo $[-1; 4]$ e le rette tangenti al diagramma della funzione nei due punti di ascissa x_1, x_2 , che com'è

noto sono parallele alla corda AB.

c) $f(x) = \sqrt{x-2}$, con $x \in [2; 6]$

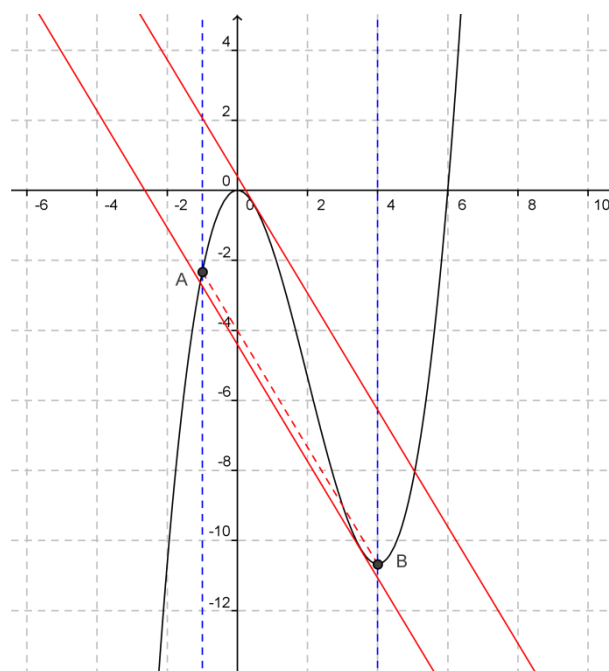


Figura 1

La funzione è definita nell'intervallo $[2; +\infty[$, è continua in tutto il dominio ed è derivabile per ogni $x \neq 2$; sono soddisfatte pertanto le ipotesi del teorema di Lagrange. Si ha

$$f(2) = 0; \quad f(6) = 2; \quad \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{1}{2}.$$

Essendo $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$, risolviamo l'equazione

$\frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{1}{2}$, la cui unica soluzione è $x = 3$ che risulta interna all'intervallo $[2; 6]$ e rappresenta dunque il punto previsto dalla tesi del teorema di Lagrange.

d) $f(x) = \frac{1}{x-3}$, con $x \in [-2; -1]$

La funzione è definita in $\mathbb{R} - \{3\}$ e nell'intervallo $[-2; -1]$ verifica le ipotesi del teorema.

Risulta

$$f(-2) = -\frac{1}{5}; \quad f(-1) = -\frac{1}{4}; \quad \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{1} = -\frac{1}{20}.$$

Essendo $f'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$, risolviamo l'equazione

$$f'(x) = -\frac{1}{20}.$$

$$-\frac{1}{(x-3)^2} = -\frac{1}{20} \rightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{5}$$

Dei due valori trovati $x_1 = 3 - 2\sqrt{5} \simeq -1,472$, è interno all'intervallo in esame, mentre

$x_2 = 3 + 2\sqrt{5} \simeq 7,472$ è esterno allo stesso intervallo. Il punto previsto dal teorema di Lagrange è pertanto $x_1 = 3 - 2\sqrt{5}$.

e) $f(x) = \frac{1}{x-3}$, con $x \in [2; 4]$

Osserviamo che la funzione non è definita nel punto $x=3$ che è interno all'intervallo assegnato $[2; 4]$, quindi non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Lagrange. Il teorema pertanto non è applicabile. Ciononostante studiamo se sussiste l'uguaglianza

$$f'(x_0) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} \text{ per eventuali punti dell'intervallo.}$$

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{1 - (-1)}{4 - 2} = 1.$$

L'equazione

$$f'(x) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} \quad \text{è la seguente} \quad -\frac{1}{(x-3)^2} = 1, \text{ che evidentemente non ha soluzioni perché il}$$

primo membro per ogni $x \neq 3$ è negativo, dunque non può essere uguale al secondo membro che è positivo.

Concludiamo che nell'intervallo $[2;4]$ non esiste alcun punto in cui si verifichi l'uguaglianza studiata.

$$f) \quad f(x) = x\sqrt{x+1}, \text{ con } x \in [-1;3]$$

La funzione è definita nell'intervallo $[-1;+\infty[$ ed è derivabile per ogni $x \neq -1$, verifica pertanto nell'intervallo le ipotesi del teorema di Lagrange.

Risposta

$$\text{Il punto previsto dal teorema di Lagrange è } x_0 = \frac{\sqrt{21}-1}{6} \text{ e risulta } f'(x_0) = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Osserviamo che } \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ e che}$$

$$f'(x) = \sqrt{x+1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

Quindi si deve risolvere la seguente equazione

$$\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3x+2}{\sqrt{x+1}} = 3$$

Osserviamo che il secondo membro è positivo dunque tale deve essere il primo; le eventuali soluzioni devono verificare la limitazione $x > -2/3$. Ciò premesso eleviamo al quadrato i due membri:

$$9x^2 + 12x + 4 = 9x + 9 \rightarrow 9x^2 + 3x - 5 = 0$$

L'equazione ottenuta ammette come radici

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{6}, \text{ da cui}$$

$$x_1 = -\frac{1+\sqrt{21}}{6} < -\frac{2}{3}, \text{ va scartata;}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{21}-1}{6} \approx 0,597 \quad \text{Questo è il punto che}$$

verifica la tesi del teorema di Lagrange.

In Figura 2 è rappresentato parzialmente il diagramma della funzione $f(x) = x\sqrt{x+1}$ e sono evidenziati la corda AB, che congiunge i punti estremi del grafico $A(-1;f(-1))$, $B(3;f(3))$ dell'intervallo $[-1;3]$ del dominio, il punto

$$T\left(\frac{\sqrt{21}-1}{6}; 0,75\right)$$

del diagramma la cui ascissa rappresenta il punto previsto dal teorema di Lagrange e la retta tangente in T al diagramma che è parallela alla corda AB.

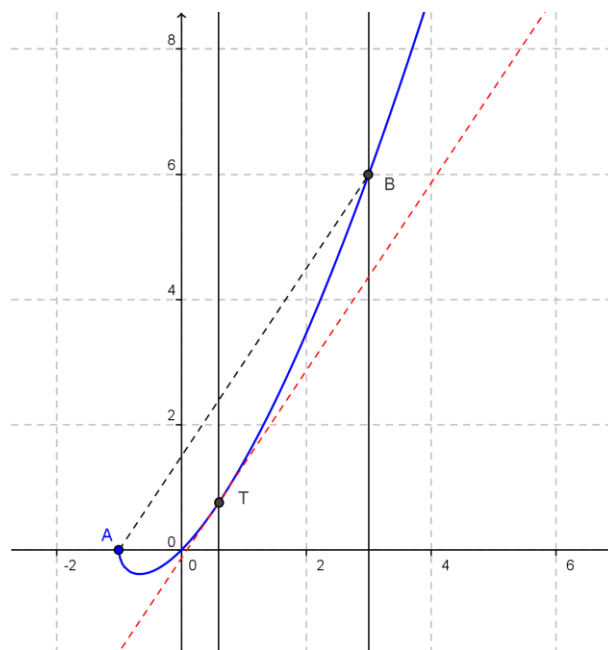


Figura 2