

Esercitazione sui limiti di diverse forme (0/0, 1/0, $\infty - \infty$, ∞/∞)

Livello di difficoltà medio-basso

Per ogni esercizio è riportato l'indicatore Liv_x che ne indica il livello di difficoltà, con $1 \leq x \leq 5$; Liv_1 indica il livello di difficoltà più basso, Liv_5 indica il livello di difficoltà più alto.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{x} = \frac{0}{0}$ (Liv_2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 1 - \frac{1}{0^+} = 1 - \infty = -\infty$$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = +\infty - \infty$ (Liv_2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2}{x + \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{2x} + 1}{e^{3x} - e^{2x} + 5} = \frac{\infty}{\infty}$ (Liv_2)

Ponendo $e^x = t$ il limite diventa

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t + t^2 + 1}{t^3 - t^2 + 5} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 \left(\frac{1}{t} + 1 + \frac{1}{t^2} \right)}{t^3 \left(1 - \frac{1}{t} + \frac{5}{t^3} \right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{t} + 1 + \frac{1}{t^2} \right)}{t \left(1 - \frac{1}{t} + \frac{5}{t^3} \right)} = \frac{0 + 1 + 0}{+\infty(1 - 0 + 0)} = 0^+$$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{4x^2} = \frac{0}{0}$ (Liv_2)

Studiamo il limite in due diversi modi.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^2 x - 1}{4x^2} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = -\frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{4}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{4x^2} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2} =$
 $-\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = -\frac{1}{4}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + \sin x}{3x - \sin x} = \frac{0}{0}$ (Liv_2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^2}{x} + \frac{\sin x}{x}}{\frac{3x}{x} - \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \frac{\sin x}{x}}{3 - \frac{\sin x}{x}} = \frac{0 + 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin(3x)}{6x - \tan(4x)} = \frac{0}{0}$ (Liv_2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x} + 3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x}}{\frac{6x}{x} - 4 \cdot \frac{\tan(4x)}{4x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x}}{6 - 4 \cdot \frac{\tan(4x)}{4x}} = \frac{1 + 3 \cdot 1}{6 - 4 \cdot 1} = 2$$

Nota_1

Si ricordino i limiti notevoli

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} = \frac{1}{2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} \quad (\text{Liv}_2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{0}{1 + 1} = 0$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{\sin^3 x} = \frac{0}{0} \quad (\text{Liv}_2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin x} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x+2) - \ln(3x+2)}{\sin x} = \frac{\infty - \infty}{0} \quad (\text{Liv}_3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x+2) - \ln(3x+2)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{4x+2}{3x+2}\right)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{3x+2}{3x+2} + \frac{x}{3x+2}\right)}{\sin x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{3x+2}\right)}{\frac{x}{3x+2}} \cdot \frac{1}{3x+2} \cdot \frac{x}{\sin x} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(1 + \tan x)}{\sin x} = \frac{0}{0} \quad (\text{Liv}_3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(1 + \tan x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(1 + \tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(1 + \tan x)}{\tan x} \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{\sin x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} =$$

$$1(-1) = -1$$

Nota_2

Si ricordi il limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$