

Geometria piana, Trigonometria, Analisi matematica

Problema

In una circonferenza di centro O e raggio r sia AB una corda distante dal centro $r/2$ che interseca il diametro ad essa perpendicolare nel punto K . Tracciare una qualsiasi retta s per il centro O che intersechi la corda AB in P e in C e D la circonferenza.

Quesiti

- 1) Indicata con α l'ampiezza dell'angolo OPK , esprimere in funzione di α l'area del rettangolo avente per dimensioni i segmenti PC , PD .
- 2) In relazione al problema geometrico enunciato, indicata con $f(\alpha)$ la funzione area del rettangolo di cui al precedente punto, determinare il suo dominio di definizione e studiarne i limiti agli estremi dello stesso.
- 3) Studiare la monotonia di $f(\alpha)$ precisandone la derivabilità. Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativi o assoluti della funzione.
- 4) Rappresentare il diagramma della funzione $y=f(\alpha)$.

Soluzione

Facciamo riferimento alla Figura 1.

- 1) Osserviamo prima di tutto che la corda AB rappresenta il lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza. Ciò si evince immediatamente considerando il triangolo rettangolo AOK nel quale il cateto OK è congruente alla metà dell'ipotenusa AO , raggio della circonferenza, quindi l'angolo OAK misura 30° . In figura è rappresentato il triangolo equilatero ABN . Risulta dunque $\overline{AB} = r\sqrt{3}$.

Osserviamo ancora che fissato il punto P su AB e considerata la retta s indicata nel testo del problema, le misure dei segmenti PC , PD sono legate alle misure dei segmenti AP , PB dal teorema delle corde⁽¹⁾ e risulta $\overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

Facciamo notare ancora che il problema in esame presenta una simmetria. Precisamente, se in luogo della retta s passante per il centro O della circonferenza e per il punto P di AB si considera la retta s' passante per O e per il punto P' , simmetrico di P rispetto al diametro MN perpendicolare alla corda AB , evidentemente i segmenti $P'C'$, $P'D'$ sono rispettivamente congruenti ai segmenti PC , PD e l'angolo $OP'K \cong OPK$. Ciò premesso, per lo studio dell'area del rettangolo di lati PC , PD è sufficiente limitare la variabilità del punto P sulla semicorda AK .

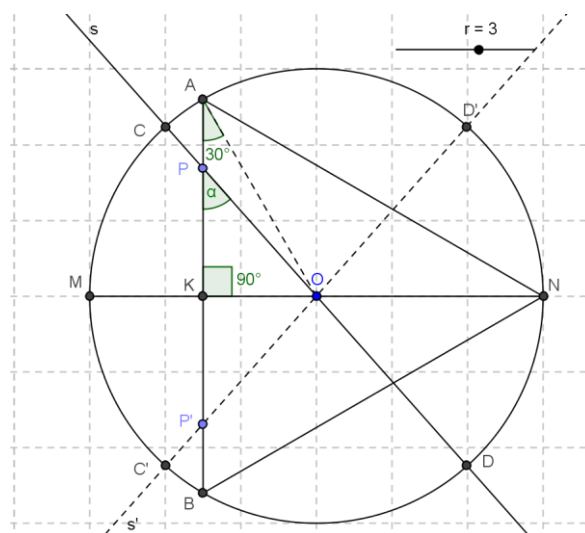


Figura 1

⁽¹⁾ Enunciato del teorema delle corde : "In una stessa circonferenza due corde che si intersecano si dividono in due parti in modo che i segmenti di una sono i medi e i segmenti dell'altra gli estremi della stessa proporzione".

Espressione dell'area del rettangolo avente per dimensioni i segmenti PC, PD.

Abbiamo precisato che i segmenti PC, PD, per il teorema delle corde sono legati ai segmenti PA, PB, in cui P divide la corda AB, dalla relazione $\overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$, dunque l'area del rettangolo considerato, che ovviamente dipende dall'ampiezza dell'angolo $OPK = \alpha$, è $f(\alpha) = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

Dal triangolo rettangolo OKP ricaviamo

$$\overline{OK} = \frac{r}{2}; \quad \overline{KP} = \frac{\overline{OK}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{r}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha} \rightarrow$$

$$\overline{PA} = \overline{KA} - \overline{KP} = \frac{\overline{AB}}{2} - \overline{KP} = \frac{r\sqrt{3}}{2} - \frac{r}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{r}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right);$$

$$\overline{PB} = \overline{BK} + \overline{KP} = \frac{r}{2} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \quad \text{e dunque}$$

$$f(\alpha) = \frac{r}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \cdot \frac{r}{2} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = \frac{r^2}{4} \left(3 - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right)$$

2) Dominio di definizione della funzione area

Al variare del punto P sulla semicorda KA l'ampiezza dell'angolo OPK varia dal valore minimo 30° , corrispondente alla posizione $P \equiv A$, al valore massimo 90° , corrispondente alla posizione $P \equiv K$. Poiché non esiste la tangente goniometrica dell'angolo 90° , il dominio di definizione della funzione area $f(\alpha)$ del rettangolo in oggetto, in radianti, è solo l'intervallo $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right]$.

Studio dei limiti agli estremi del dominio.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{r^2}{4} \left(3 - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = \frac{r^2}{4} \left(3 - \frac{1}{\left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)^2} \right) = \frac{r^2}{4} (3 - 3) = 0;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} \right)^-} \frac{r^2}{4} \left(3 - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = \frac{r^2}{4} \left(3 - \frac{1}{(+\infty)^2} \right) = \frac{3r^2}{4}$$

3) Derivabilità, monotonia, eventuali punti di massimo e di minimo relativi o assoluti

Calcolo della funzione derivata prima.

Posto $f(\alpha) = \frac{r^2}{4} (3 - \operatorname{tg}^{-2} \alpha)$ si ha

$$f'(\alpha) = \frac{r^2}{4} (0 - (-2) \operatorname{tg}^{-3} \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)) = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^3 \alpha}$$

Osserviamo che la funzione derivata prima esiste in ogni punto del dominio della funzione $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$

e risulta positiva, pertanto la funzione è strettamente crescente e ciò implica che per $\alpha = \frac{\pi}{6}$ la

funzione assume il suo minimo assoluto, che è zero mentre **il valore del limite per** $\alpha \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$

rappresenta l'estremo superiore della funzione, che tuttavia non può essere considerato massimo

della stessa perché nel punto $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la funzione non è definita.

In riferimento alla figura geometrica, il valore $\alpha = \frac{\pi}{2}$ corrisponde alla posizione del punto $P \equiv K$ e i

due segmenti PC, PD coincidono rispettivamente con KM, KN di misure $r/2$, $3r/2$, per cui il rettangolo che li ha come dimensioni ha area

$$\text{Area} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \frac{r}{2} \cdot \frac{3r}{2} = \frac{3r^2}{4}$$

e questo è effettivamente il massimo valore dell'area del rettangolo avente come dimensioni i segmenti PC, PD.

Notiamo che il valore ottenuto coincide anche con $\overline{KA}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)^2 = \frac{3r^2}{4}$.

Diagramma della funzione area

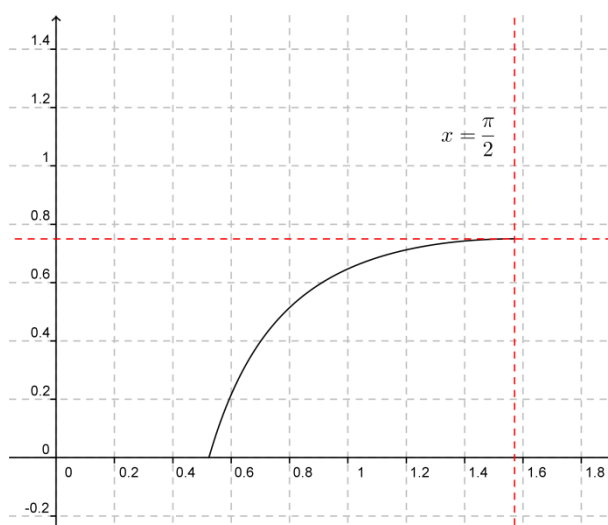


Figura 2