

Alcuni limiti nelle prove dell'Esame di Stato

1) Esame di Stato, Liceo Scientifico, Sessione Ordinaria, anno 2001, Quesito n.9

Test Il limite della funzione $\frac{\sin x - \cos x}{x}$, quando $x \rightarrow +\infty$

- a) È uguale a zero
- b) È uguale a 1
- c) È un valore diverso dai due precedenti
- d) Non è determinato

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

La **risposta corretta** tra quelle proposte è la **a)**.

*** **

2) Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva, 2005, quesito 4.

Si consideri la seguente equazione in x :

$$(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0, \text{ dove } k \text{ è un parametro reale diverso da } 2.$$

Indicate con x' , x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

Risoluzione

Ricordiamo che la somma delle radici dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ vale

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \text{ quindi nel caso in esame risulta}$$

$$x' + x'' = \frac{2k-1}{k-2}.$$

Studio dei tre limiti

$$3.1) \lim_{k \rightarrow 2} \frac{2k-1}{k-2} = \frac{3}{0}, \text{ il limite non esiste perché i due limiti laterali esistono e sono diversi tra loro.}$$

Infatti risulta

Risposte: per $x \rightarrow 2$ il limite non esiste; per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$ il limite vale 2.

*** **

3) Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione Straordinaria, 2007, quesito n.6

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Se ne studi la continuità nel punto $x=0$.

Risposta - La funzione nel punto $x=0$ è continua, come del resto è continua su tutto l'asse reale.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

*** **

4) Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione Straordinaria, 2007, quesito n.8

Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = \frac{ax^2 + 6}{bx + 3}$ perché la curva rappresentativa ammetta un asintoto obliquo d'equazione $y=x+3$.

Risposta $a = b = -1$

*** **

5) Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, anno 2008, Sessione Ordinaria, Quesito n.9

Sia $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$; esiste il $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.

Risposta Il limite non esiste. Nel punto la funzione presenta una discontinuità di prima specie.

*** **

6) Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione Suppletiva, anno 2008, quesito n.3

Si determinino le equazioni degli asintoti della curva $f(x) = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

Risposta

Il diagramma della funzione ammette due asintoti: uno orizzontale, $s_1: y=2$, per $x \rightarrow +\infty$, ed uno obliquo, $s_2: y=-2x$, per $x \rightarrow -\infty$.

*** **

7) Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso PNI, Sessione Ordinaria, anno 2013, quesito n.8

Si mostri, senza utilizzare il teorema di l'Hôpital, che:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin \pi}}{x - \pi} = -1$$